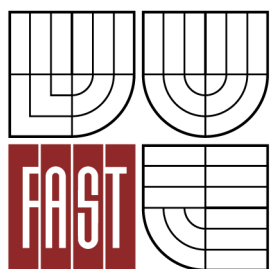




VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STAVEBNÍ  
ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING  
INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

## VÝPOČET PLASTICKÉ ÚNOSNOSTI DESEK

ANALYSIS OF PLASTIC BEARABILITY OF PLATES

DIPLOMOVÁ PRÁCE  
MASTER'S THESIS

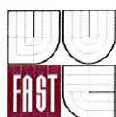
AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Bc. VERONIKA ROZSYPALOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

doc. Ing. IVAN NĚMEC, CSc.

BRNO 2013



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

|                                |   |
|--------------------------------|---|
| <b>Studijní program</b>        | N3607 Stavební inženýrství  |
| <b>Typ studijního programu</b> | Navazující magisterský studijní program s prezenční formou studia |
| <b>Studijní obor</b>           | 3608T001 Pozemní stavby   |
| <b>Pracoviště</b>              | Ústav stavební mechaniky  |

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

**Diplomant** Bc. Veronika Rozsypalová


**Název** Výpočet plastické únosnosti desek

**Vedoucí diplomové práce** doc. Ing. Ivan Němec, CSc.

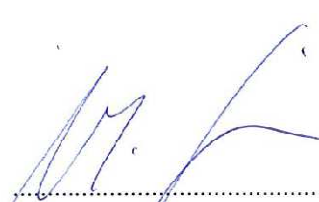
**Datum zadání  
diplomové práce** 31. 3. 2012

**Datum odevzdání  
diplomové práce** 11. 1. 2013

V Brně dne 31. 3. 2012

  
.....  
prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.  
Vedoucí ústavu



  
.....  
prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc.  
Děkan Fakulty stavební VUT

## **Podklady a literatura**

Němec et al.: Finite Element Analysis of Structures  
de Souza Neto, Perić, Owen: Computational Methods for Plasticity

## **Zásady pro vypracování (zadání, cíle práce, požadované výstupy)**

Cílem práce je prozkoumání možností výpočtu mezní únosnosti desek s respektováním geometrické nelinearity a s užitím von Misesovy podmínky plasticity pomocí programu RFEM. Mezní únosnost získaná počítačovou simulací bude porovnána s přibližným řešením.

## **Struktura bakalářské/diplomové práce**

VŠKP vypracujte a rozdělte podle dále uvedené struktury:

1. Textová část VŠKP zpracovaná podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (povinná součást VŠKP).
2. Přílohy textové části VŠKP zpracované podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (nepovinná součást VŠKP v případě, že přílohy nejsou součástí textové části VŠKP, ale textovou část doplňují).



doc. Ing. Ivan Němec, CSc.  
Vedoucí diplomové práce

## **ABSTRAKT**

Předmětem této diplomové práce je výpočet plastické únosnosti desek. První část práce je věnována popisu použitých teorií. Jedná se v první řadě o teorii materiálové nelinearity a plasticity, včetně popisu modelů plasticity, které jsou nejčastěji používané v inženýrských analýzách. Dále je naznačena teorie geometrické nelinearity a probrány základní principy výpočtu mezní plastické únosnosti desek. Součástí práce jsou výpočty mezní únosnosti vybraných tvarů desek, jejich řešení jak ručním výpočtem, tak s využitím výpočtového softwaru, a následné vyhodnocení získaných hodnot. V přílohách jsou uvedeny postupy tvorby modelů ve výpočtových programech RFEM a ANSYS.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Materiálová nelinearita, geometrická nelinearita, plasticita, von Misesovo kritérium, plastická únosnost desek.

## **ABSTRACT**

The subject of this thesis is analysis of the plastic bearability of plates. The first part is dedicated to a description of pertinent theories. It is primarily a theory of material nonlinearity and plasticity, including a description of plasticity models, which are commonly used in engineering analysis. Next is the hinted theory of geometric nonlinearity and discusses the key principles of limit plastic bearability of plates. This thesis includes ultimate strength calculations of plates of selected shapes, their solution by both, a manual calculation and using computational software. The obtained values are subsequently evaluated. The appendices contain the procedures for modelling in the computational programs RFEM and ANSYS.



## **KEY WORDS**

Material nonlinearity, geometric nonlinearity, plasticity, von Mises criterion, plastic bearability of plates.

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE VŠKP**

ROZSYPALOVÁ, Veronika. *Výpočet plastické únosnosti desek*. Brno, 2012. 194 stran, 17 stran příloh. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí práce doc. Ing. Ivan Němec, CSc.

## **PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně a že jsem uvedla všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 10. 1. 2013

.....  
Bc. Veronika Rozsypalová

# **PROHLÁŠENÍ O SHODĚ LISTINNÉ A ELEKTRONICKÉ FORMY**

## **PROHLÁŠENÍ**

Prohlašuji, že elektronická forma odevzdané práce je shodná s odevzdanou listinnou.

V Brně dne 10. 1. 2013

.....  
Bc. Veronika Rozsypalová

## **PODĚKOVÁNÍ**

Ráda bych poděkovala vedoucímu mé diplomové práce panu doc. Ing. Ivanu Němcovi, CSc. za jeho velmi cenné rady, ochotu, trpělivost i kritické připomínky, díky čemuž tato práce vznikla. Dále panu Ing. Jaromírovi Kabeláčovi, Dr. Ing. Radoslavovi Rusinovi, PhD., a dalším, kteří ochotně pomohli při řešení problémů. V neposlední řadě také rodině a všem blízkým, kteří mi umožnili dostat se tak daleko, abych tuto závěrečnou práci mohla vypracovat.

# SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

|                             |  |
|-----------------------------|--|
| $\alpha$                    | vnitřní proměnná funkce zpevnění                               |
| $\dot{\gamma}$              | plastický násobitel  |
| $\varepsilon$               | celková axiální deformace                                      |
| $\varepsilon^p$             | trvalá (plastická) axiální deformace                           |
| $\varepsilon^e$             | vratná (elastická) axiální deformace                           |
| $\dot{\varepsilon}^p$       | míra plastické axiální deformace                               |
| $\bar{\varepsilon}^p$       | celkové axiální plastické deformace                            |
| $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$ | míra celkové axiální plastické deformace                       |
| $\varepsilon_{ij}$          | lineární tenzor deformace v indexové notaci                    |
| $\varepsilon_n$             | logaritmická míra deformace                                    |
| $\varepsilon_x$             | lineární deformace   |
| $\varepsilon$               | tenzor deformace   |
| $\varphi$                   | úhel svíraný normálou a osou x [rad]                           |
| $\theta$                    | lode úhel  |
| $\lambda_i$                 | vlastní čísla pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace        |
| $\rho_0$                    | původní hustota na počáteční konfiguraci [kg.m <sup>-3</sup> ] |
| $\rho$                      | běžná hustota na běžné konfiguraci [kg.m <sup>-3</sup> ]       |
| $\sigma$                    | axiální napětí [Pa]  |

|                 |   |
|-----------------|---|
| $\sigma_0$      | předepsaná hodnota axiálního napětí [Pa]  |
| $\sigma_1$      | vyšší hladina axiálního napětí [Pa]   |
| $\sigma_y$      | axiální napětí na mezi kluzu [Pa]   |
| $\dot{\sigma}$  | míra axiálního napětí [Pa]  |
| $\sigma_i$      | hlavní napětí [Pa]  |
| $\sigma_m$      | mezní napětí v prostém tahu (tlaku) [Pa]  |
| $\sigma_{\max}$ | maximum hlavního napětí [Pa]  |
| $\sigma_{\min}$ | minimum hlavního napětí [Pa]  |
| $\sigma$        | tenzor napětí [Pa]  |
| $\sigma$        | Cauchyho napětí [Pa]  |
| $\sigma^\nabla$ | objektivní tok napětí [Pa.s <sup>-1</sup> ]   |
| $\tau$          | smykové napětí [Pa]   |
| $\tau_y$        | smykové napětí na mezi kluzu [Pa]   |
| $\tau_{\max}$   | maximální smykové napětí [Pa]   |
| $\Sigma$        | $= \sigma \otimes \mathbf{I}$ [Pa]  |
| $\psi^e$        | uchovaná hustota energie pružného přetvoření [Pa.m <sup>3</sup> .kg <sup>-1</sup> ]       |
| $\psi_d^e$      | deviatorický příspěvek energie pružného přetvoření [Pa.m <sup>3</sup> .kg <sup>-1</sup> ] |
| $\psi_v^e$      | volumetrický příspěvek energie pružného přetvoření [Pa.m <sup>3</sup> .kg <sup>-1</sup> ] |

|                     |   |
|---------------------|---|
| $\Phi$              | funkce plasticity [Pa]  |
| $\dot{\Phi}$        | míra funkce plasticity [Pa]   |
| $d\Omega$           | infinitesimální objem na běžné konfiguraci [m <sup>3</sup> ]                    |
| $d\Omega_0$         | infinitesimální objem na původní konfiguraci [m <sup>3</sup> ]                  |
| $\mathcal{E}$       | elastická oblast [Pa]   |
| $\mathcal{Y}$       | plastický povrch [Pa]   |
| $a$                 | skalár  |
| $\mathbf{b}$        | vektor gravitačního zrychlení [kg.m.s <sup>-1</sup> ]                           |
| $c$                 | součinitel viskózního útlumu [kg.s <sup>-1</sup> ]                              |
| $\mathbf{d}$        | vektor parametrů deformace [m]  |
| $\delta \mathbf{d}$ | virtuální přírůstek vektoru parametrů deformace v běžné konfiguraci [m]         |
| $e_i$               | jednotkové vlastní vektory  |
| $e_{ij}$            | Euler-Almansiho tenzor deformace v indexové notaci                              |
| $\hat{e}_{ij}$      | infinitesimální tenzor deformace v prostorových souřadnicích v indexové notaci  |
| $\mathbf{e}$        | Euler-Almansiho tenzor deformace v tenzorové notaci                             |
| $\hat{\mathbf{e}}$  | infinitesimální tenzor deformace v prostorových souřadnicích v tenzorové notaci |
| $\mathbf{e}_i$      | vlastní vektory pravého Cauchy-Greenova tenzoru deformace                       |
| $\delta \mathbf{e}$ | virtuální přírůstek vlastních vektorů   |



|                           |  |
|---------------------------|--|
| $\delta \{ \mathbf{e} \}$ | virtuální přírůstek Euler-Almansiho tenzoru deformace v běžné konfiguraci ve Voigtově notaci |
| $\mathbf{f}$              | vektor objemových sil [ $\text{N} \cdot \text{m}^{-3}$ ]                                     |
| $\mathbf{f}_d$            | vektor objemových tlumicích sil [ $\text{N} \cdot \text{m}^{-3}$ ]                           |
| $\mathbf{f}^{\text{int}}$ | vnitřní uzlové síly [N]  |
| $d\mathbf{f}_0$           | síla na nedeformovanou plošku $dA_0$ transformovaná do materiálových souřadnic [N]           |
| $d\mathbf{f}$             | síla na plošku $dA$ (resp. $dA_0$ ) v prostorových souřadnicích [N]                          |
| $\mathbf{g}_i$            | matice prvních derivací báзовých funkcí pro každý uzel $i$ [ $\text{m}^{-1}$ ]               |
| $l_0$                     | počáteční délka [m]  |
| $l$                       | výsledná délka [m]   |
| $m_x, m_y$                | ohybové momenty [Nm]   |
| $m_{xy}$                  | krouticí moment [Nm]   |
| $dm_0$                    | infinitesimální hmotnost na původní konfiguraci [kg]   |
| $dm$                      | infinitesimální hmotnost na běžné konfiguraci [kg]   |
| $\mathbf{n}_0$            | jednotková normála k plošce $dA_0$   |
| $\mathbf{n}$              | jednotková normála k plošce $dA$   |
| $p$                       | hydrostatický tlak [Pa], intenzita plošného zatížení [ $\text{Nm}^{-2}$ ]                    |
| $p^*$                     | superpozice libovolného tlaku [Pa]   |
| $q$                       | von Misesovo ekvivalentní napětí [Pa]  |

|                        |  |
|------------------------|--|
| $q_x, q_y$             | posouvající síly [N]   |
| $\mathbf{q}$           | vektor tepelného toku [ $\text{W}\cdot\text{m}^{-4}$ ]   |
| $s$                    | deviátor napětí [Pa]   |
| $t$                    | čas [s]  |
| $\mathbf{t}_0$         | vektor napětí působící na plošku $dA_0$ [Pa]   |
| $\mathbf{t}$           | vektor napětí působící na plošku $dA$ [Pa]   |
| $u_{i,j}$              | složka vektoru posunutí $i$ v uzlu $j$ [m]   |
| $\mathbf{u}$           | vektor posunutí [m]  |
| $\ddot{\mathbf{u}}$    | vektor zrychlení daného bodu tělesa [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ]   |
| $\mathbf{v}$           | vektor rychlosti [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ]  |
| $\dot{\mathbf{v}}$     | vektor zrychlení daného bodu tělesa [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ]   |
| $w$                    | energie na jednotku plochy [ $\text{J}\cdot\text{m}^{-3}$ ]  |
| $\dot{w}^{\text{int}}$ | rychlost změny hustoty potenciální energie vnitřních sil hyperplastického potenciálu na původní konfiguraci [ $\text{J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{s}^{-1}$ ] |
| $\mathbf{x}$           | vektor prostorových souřadnic [m]  |
| $x_j$                  | prostorová souřadnice uzlu $j$ [m]   |
| $\mathbf{x}_T$         | vektor posunutí počátku v prostorových souřadnicích [m]  |
| $\mathbf{A}$           | matice zpevnění [Pa]   |
| $dA_0$                 | infinitesimální ploška v tělese v původní konfiguraci [ $\text{m}^2$ ]   |
| $dA$                   | infinitesimální ploška v běžné konfiguraci [ $\text{m}^2$ ]  |

|                          |   |
|--------------------------|---|
| $d\mathbf{A}_0$          | vektor orientované plochy v materiálových souřadnicích v původní konfiguraci [ $\text{m}^2$ ]                                 |
| $d\mathbf{A}$            | vektor orientované plochy v prostorových souřadnicích v běžné konfiguraci [ $\text{m}^2$ ]                                    |
| $\mathbf{B}$             | levý Cauchy-Greenův tenzor deformace (Cauchy strain tenzor), matice prostorových derivací báзовých funkcí [ $\text{m}^{-1}$ ] |
| $\mathbf{C}^{\text{se}}$ | tečný modul [Pa]  |
| $\mathbf{C}^{\sigma}$    | tenzor modulů pružnosti [Pa]  |
| $[\mathbf{C}^{\sigma}]$  | tečná konstitutivní matice na běžné konfiguraci [Pa]  |
| $\mathbf{D}$             | tenzor rychlosti deformace [ $\text{s}^{-1}$ ]  |
| $E$                      | Youngův modul pružnosti materiálu v tahu [Pa]   |
| $E^{\text{ep}}$          | elastoplastický tečný modul [Pa]  |
| $\mathbf{E}$             | Green-Lagrangeův tenzor deformace   |
| $\dot{\mathbf{E}}$       | rychlost změny Green-Lagrangeova tenzoru deformace [ $\text{s}^{-1}$ ]  |
| $\mathbf{F}$             | deformační gradient   |
| $G$                      | modul pružnosti ve smyku [Pa]   |
| $\mathbf{G}$             | matice tvořena submaticemi prvních derivací báзовých funkcí [ $\text{m}^{-1}$ ]   |
| $H$                      | modul zpevnění [Pa]   |
| $\mathbf{I}$             | jednotková diagonální matice  |
| $I_1, I_2, I_3$          | invarianty tenzorů napětí [Pa, Pa <sup>2</sup> , Pa <sup>3</sup> ]  |
| $J$                      | Jacobiho matice   |

|                           |  |
|---------------------------|--|
| $J_1, J_2, J_3$           | invarianty deviátoru napětí [Pa, Pa <sup>2</sup> , Pa <sup>3</sup> ]           |
| $K$                       | objemový modul pružnosti [Pa]  |
| $\mathbf{K}$              | sečná matice tuhosti (pro izoparametrické prvky [N.m <sup>-1</sup> ])          |
| $\mathbf{K}_T$            | tečná matice tuhosti (pro izoparametrické prvky [N.m <sup>-1</sup> ])          |
| $\mathbf{K}_M$            | tečná materiálová matice tuhosti (pro izoparametr. prvky [N.m <sup>-1</sup> ]) |
| $\mathbf{K}_\sigma$       | tečná geometrická matice tuhosti (pro izoparametr. prvky [N.m <sup>-1</sup> ]) |
| $\mathbf{L}$              | gradient rychlosti [s <sup>-1</sup> ]  |
| $M_m$                     | mezní moment [Nm]  |
| $M_{mx}, M_{my}$          | mezní moment při kladném namáhání [Nm]   |
| $M'_{mx}, M'_{my}$        | mezní moment při záporném namáhání [Nm]  |
| $N$                       | dimenze prostoru   |
| $\mathbf{N}$              | matice báзовých funkcí   |
| $\mathbf{R}$              | tenzor rotace  |
| $\mathbf{S}$              | druhé napětí Piolla-Kirchhoff [Pa]   |
| $\mathbf{S}_t^{\sigma D}$ | funkce závislá na Cauchyho napětí rychlosti deformace [Pa.s-1]                 |
| $\mathbf{U}$              | pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace  |
| $W^{\text{int}}$          | virtuální práce vnitřních sil [J.m <sup>-3</sup> ]                             |
| $X_i$                     | materiálová souřadnice uzlu i [m]  |
| $\mathbf{X}$              | vektor materiálových souřadnic [m]   |

|            |                                |
|------------|--------------------------------|
| $\nabla$   | prostorový gradient            |
| $\nabla_0$ | materiálový gradient           |
| $\otimes$  | tenzorový (Kroneckerův) součin |

# OBSAH

|  |           |
|--|-----------|
| <b>ÚVOD.....</b>   | <b>22</b> |
| <b>1 MATERIÁLOVÁ NELINEARITA A PLASTICITA.....</b>                   | <b>24</b> |
| <b>1.1 FENOMENOLOGICKÉ ASPEKTY .....</b>                             | <b>24</b> |
| <b>1.2 JEDNO-DIMENZIONÁLNÍ KONSTITUTIVNÍ MODEL .....</b>             | <b>27</b> |
| 1.2.1 ELASTOPLASTICKÝ ROZKLAD AXIÁLNÍHO (OSOvéHO) NAMÁHÁNÍ ..        | 28        |
| 1.2.2 ELASTICKÝ JEDNOOŠÝ KONSTITUTIVNÍ ZÁKON .....                   | 29        |
| 1.2.3 FUNKCE A KRITÉRIUM PLASTICITY .....                            | 29        |
| 1.2.4 ZÁKON PLASTICKÉHO TEČENÍ. ZATĚŽOVACÍ A ODTĚŽOVACÍ KŘIVKA ..... | 31        |
| 1.2.5 ZÁKON ZPEVNĚNÍ.....  | 33        |
| 1.2.6 ZÁVĚREČNÉ SHRUTÍ MODELU .....                                  | 34        |
| 1.2.7 STANOVENÍ PLASTICKÉHO NÁSOBITELE .....                         | 35        |
| 1.2.8 ELASTOPLASTICKÝ TEČNÝ MODUL .....                              | 37        |
| <b>1.3 KLASICKÁ KRITÉRIA PLASTICITY .....</b>                        | <b>38</b> |
| 1.3.1 TRESCOVO KRITÉRIUM PLASTICITY .....                            | 38        |
| 1.3.1.1 NECITLIVOST NA TLAK .....                                    | 40        |
| 1.3.1.2 IZOTROPIE .....  | 41        |
| 1.3.1.3 GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ .....                                    | 41        |
| 1.3.1.4 FORMULACE POMOCÍ VÍCE PLOCH .....                            | 43        |
| 1.3.1.5 FORMULACE POMOCÍ INVARIANTŮ .....                            | 45        |
| 1.3.2 VON MISESOVO KRITÉRIUM PLASTICITY .....                        | 46        |
| <b>2 GEOMETRICKÁ NELINEARITA .....</b>                               | <b>51</b> |
| <b>2.1 MÍRY DEFORMACE.....</b>                                       | <b>51</b> |
| 2.1.1 EULER-ALMANSIHO TENZOR DEFORMACE .....                         | 51        |
| 2.1.2 LOGARITMICKÁ MÍRA DEFORMACE .....                              | 53        |
| 2.1.3 INFINITEZIMÁLNÍ TENZORY DEFORMACE .....                        | 54        |
| 2.1.4 POSOUZENÍ TENZORŮ DEFORMACE .....                              | 55        |
| 2.1.4.1 TEST NA ROTACI TUHÉHO TĚLESA.....                            | 55        |
| <b>2.2 MÍRY NAPJATOSTI .....</b>                                     | <b>57</b> |
| 2.2.1 CAUCHYHO NAPĚTÍ.....   | 58        |

## **2.3 FORMULACE GEOMETRICKÉ NELINEARITY V MKP .....59**

|   |    |
|---|----|
| 2.3.1 FORMULACE NA BĚŽNÉ KONFIGURACI – UPDATED LAGRANGIAN...                        | 60 |
| 2.3.1.1 ZÁKON ZACHOVÁNÍ HMOTY.....  | 60 |
| 2.3.1.2 ZÁKON ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI .....  | 60 |
| 2.3.1.3 ZÁKON ZACHOVÁNÍ ENERGIE .....   | 61 |
| 2.3.1.4 KONSTITUTIVNÍ ROVNICE .....   | 62 |
| 2.3.1.5 GEOMETRICKÉ ROVNICE – MÍRA DEFORMACE .....                                  | 63 |
| 2.3.1.6 DISKRETIZACE MKP PRO FORMULACI NA BĚŽNÉ KONFIGURACI – UPDATED LAGRANGIAN... | 64 |
| 2.3.1.7 TEČNÁ MATICE TUHOSTI .....  | 65 |

## **3 MEZNÍ PLASTICKÁ ÚNOSNOST DESEK..... 68**

### **3.1 ZÁKLADNÍ PRINCIPY VÝPOČTU MEZNÍ PLASTICKÉ ÚNOSNOSTI DESEK.....68**

## **4 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY ..... 77**

### **4.1 RUČNÍ ŘEŠENÍ MEZNÍ PLASTICKÉ ÚNOSNOSTI DESEK KINEMATICKOU METODOU S VYUŽITÍM VON MISESOVA KRITÉRIA PLASTICITY.....77**

|   |     |
|---|-----|
| 4.1.1 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 16 x 8 m.....                         | 77  |
| 4.1.2 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 14 x 10 m.....                        | 82  |
| 4.1.3 ČTVERCOVÁ DESKA 10 x 10 m .....                         | 87  |
| 4.1.4 KRUHOVÁ DESKA poloměr 5 m – 1. varianta mechanismu..... | 91  |
| 4.1.5 KRUHOVÁ DESKA poloměr 5 m – 2. varianta mechanismu..... | 96  |
| 4.1.6 TROJÚHELNÍKOVÁ DESKA strana 5 m.....                    | 102 |
| 4.1.7 TROJÚHELNÍKOVÁ DESKA strana 7 m.....                    | 107 |
| 4.1.8 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 16 x 8 m, nesymetricky uložená .....  | 112 |
| 4.1.9 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 14 x 10 m, nesymetricky uložená ..... | 116 |

### **4.2 ŘEŠENÍ V PROGRAMU RFEM.....120**

|  |     |
|--|-----|
| 4.2.1 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 16 x 8 m, tloušťka 150 mm .....                        | 120 |
| 4.2.2 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 16 x 8 m tloušťka 1 000 mm .....                       | 122 |
| 4.2.3 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 14 x 10 m, tloušťka 150 mm .....                       | 124 |
| 4.2.4 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 14 x 10 m, tloušťka 1 000 mm .....                     | 126 |
| 4.2.5 ČTVERCOVÁ DESKA 10 x 10 m, tloušťka 150 mm.....                          | 128 |
| 4.2.6 ČTVERCOVÁ DESKA 10 x 10 m, tloušťka 1 000 mm.....                        | 130 |
| 4.2.7 KRUHOVÁ DESKA poloměr 5 m – 1. varianta mechanismu, tloušťka 150 mm..... | 132 |

|   |            |
|---|------------|
| 4.2.8 KRUHOVÁ DESKA poloměr 5 m – 1. varianta mechanismu, tloušťka 1 000 mm.....  | 134        |
| 4.2.9 KRUHOVÁ DESKA poloměr 5 m – 2. varianta mechanismu, tloušťka 150 mm.....    | 136        |
| 4.2.10 KRUHOVÁ DESKA poloměr 5 m – 2. varianta mechanismu, tloušťka 1 000 mm..... | 138        |
| 4.2.11 TROJÚHELNÍKOVÁ DESKA strana 5 m, tloušťka 150 mm .....                     | 140        |
| 4.2.12 TROJÚHELNÍKOVÁ DESKA strana 5 m, tloušťka 1 000 mm .....                   | 142        |
| 4.2.13 TROJÚHELNÍKOVÁ DESKA strana 7 m, tloušťka 150 mm .....                     | 144        |
| 4.2.14 TROJÚHELNÍKOVÁ DESKA strana 7 m, tloušťka 1 000 mm .....                   | 146        |
| 4.2.15 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 16 x 8 m, nesymetricky uložená, tloušťka 150 mm.....     | 148        |
| 4.2.16 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 16 x 8 m, nesymetricky uložená, tloušťka 1 000 mm.....   | 150        |
| 4.2.17 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 14 x 10 m, nesymetricky uložená, tloušťka 150 mm.....    | 152        |
| 4.2.18 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 14 x 10 m, nesymetricky uložená, tloušťka 1 000 mm.....  | 154        |
| <b>4.3 ŘEŠENÍ V PROGRAMU ANSYS.....</b>   | <b>156</b> |
| 4.3.1 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 16 x 8 m, tloušťka 150 mm .....                           | 156        |
| 4.3.2 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 16 x 8 m, tloušťka 1 000 mm .....                         | 158        |
| 4.3.3 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 14 x 10 m, tloušťka 150 mm .....                          | 160        |
| 4.3.4 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 14 x 10 m, tloušťka 1 000 mm .....                        | 162        |
| 4.3.5 ČTVERCOVÁ DESKA 10 x 10 m, tloušťka 150 mm.....                             | 164        |
| 4.3.6 ČTVERCOVÁ DESKA 10 x 10 m, tloušťka 1 000 mm.....                           | 166        |
| 4.3.7 KRUHOVÁ DESKA poloměr 5 m – 1. varianta mechanismu, tloušťka 150 mm.....    | 168        |
| 4.3.8 KRUHOVÁ DESKA poloměr 5 m – 1. varianta mechanismu, tloušťka 1 000 mm.....  | 170        |
| 4.3.9 KRUHOVÁ DESKA poloměr 5 m – 2. varianta mechanismu, tloušťka 150 mm.....    | 172        |
| 4.3.10 KRUHOVÁ DESKA poloměr 5 m – 2. varianta mechanismu, tloušťka 1 000 mm..... | 174        |
| 4.3.11 TROJÚHELNÍKOVÁ DESKA strana 5 m, tloušťka 150 mm .....                     | 176        |
| 4.3.12 TROJÚHELNÍKOVÁ DESKA strana 5 m, tloušťka 1 000 mm .....                   | 178        |
| 4.3.13 TROJÚHELNÍKOVÁ DESKA strana 7 m, tloušťka 150 mm .....                     | 180        |
| 4.3.14 TROJÚHELNÍKOVÁ DESKA strana 7 m, tloušťka 1 000 mm .....                   | 182        |
| 4.3.15 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 16 x 8 m, tloušťka 150 mm, nesymetricky uložená.....     | 184        |
| 4.3.16 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 16 x 8 m, tloušťka 1 000 mm, nesymetricky uložená.....   | 186        |



|   |            |
|---|------------|
| 4.3.17 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 14 x 10 m, tloušťka 150 mm, nesymetricky<br>uložená.....   | 188        |
| 4.3.18 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 14 x 10 m, tloušťka 1 000 mm, nesymetricky<br>uložená..... | 190        |
| <b>5 ZÁVĚR .....</b>  | <b>192</b> |
| <b>SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY .....</b>  | <b>194</b> |
| <b>PŘÍLOHY .....</b>  | <b>196</b> |

## ÚVOD

Snaha zdokonalovat stavební konstrukce vyžaduje co nejefektivněji vyrovnat požadavek hospodárnosti konstrukce a její bezpečnosti. To způsobuje přesun pozornosti ke komplexnějšímu sledování chování konstrukce od provozního stavu až po ztrátu únosnosti. Některé stavební materiály jsou schopny se plasticky přetvářet. V závěrečné fázi konstrukce u těchto materiálů dochází, v některých místech, ke vzniku plastických deformací. Dochází k přerozdělení vnitřních sil, jehož důsledkem je, že statický a geometrický stav konstrukce neodpovídá teorii lineární pružnosti. Z tohoto důvodu je nutné kromě poznatků teorie pružnosti vycházet také z teorie plasticity. Ta po zavedení zjednodušujících předpokladů umožňuje formulovat chování konstrukce v pružnoplastickém stavu.

Počátky teorie plasticity jsou datovány v polovině devatenáctého století a podstatný rozvoj se odehrál především v první polovině dvacátého století. Tato teorie je založena na matematických základech a je považována za jeden z nejúspěšnějších fenomenologických konstitutivních modelů pro pevné materiály.

Řešením matematických metod pro plasticitu se velmi podrobně zabývá Neto [1], Wriggers [2], Simo [3]. Matematická teorie plasticity stanovuje obecný rámec pro konstitutivní popis chování důležité třídy materiálů. V zásadě se teorie plasticity týká pevných těles, u kterých, poté, co byly vystaveny zatěžovacímu procesu, mohou zůstat po úplném odtížení trvalé (plastické) deformace. Tato teorie je omezena především na popis materiálů a podmínek, za kterých nejsou trvalé deformace závislé na rychlosti aplikace zatížení a je označována jako rate-independent plasticity. Materiály, jejichž chování může být dostatečně popsáno teorií plasticity, se nazývají plastické materiály. Velké množství technických materiálů, jako jsou kovy, beton, horniny, jíly a půdy obecně, může být modelováno jako plastické v širokém spektru okolností praktického

využití. Tento text shrnuje základy matematické teorie plasticity. Teorie zde prezentovaná, je omezena na nekonečně malé deformace a poskytuje základ pro numerické simulace chování elastoplastických těles. Pozornost je zaměřena na popis matematických modelů elastoplastických materiálů.

Následující kapitola má tuto strukturu. V části 1 jsou projednávány aspekty fenomenologického chování materiálů zatříděných jako plastické a hlavní vlastnosti jsou uvedeny v experimentu analýzy jednoduchého jednoosého tahu. Diskuse následuje v části 2 v matematické formulaci modelu jednoosého experimentu. Jednoosý model, byť jednoduchý, ztělesňuje všechny základní pojmy matematické teorie plasticity a poskytuje základ pro obecné vícerozměrné modely. Další část je zaměřena na detailní popis modelů plasticity nejčastěji používaných v inženýrských analýzách. Pro tuto práci jsou důležité modely Trescův a von Misesův.

# 1 MATERIÁLOVÁ NELINEARITA A PLASTICITA

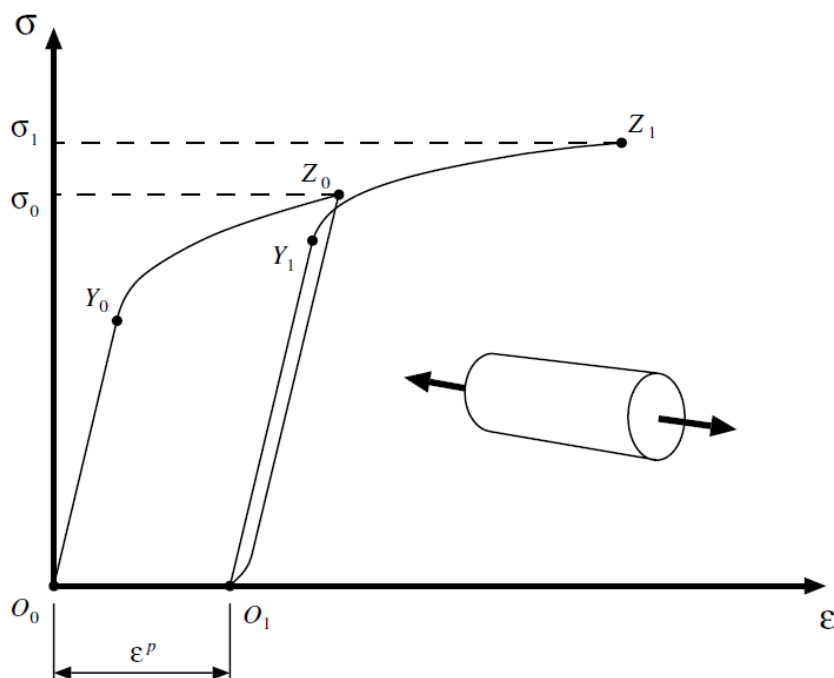
## 1.1 FENOMENOLOGICKÉ ASPEKTY

Navzdory jejich odlišným mechanickým odezvám, materiály tak kontrastní jako jsou kovy a zeminy sdílejí některé důležité rysy jejich fenomenologického chování, které je umožňují modelovat pomocí teorie plasticity. Pro ilustraci například společné funkce, zkouška jednoosým tahem s kovovým prutem je popsána v následujícím textu. Obvykle z jednoosé tahové zkoušky s tvárnými kovy získáváme křivku deformace-napětí, jak je znázorněno na obrázku 1.1.1. Ve schematickém diagramu na obrázku, kde axiální napětí  $\sigma$ , je vynášeno proti axiálnímu přetvoření  $\varepsilon$ , bylo uvažováno takové zatěžování prutu, kdy docházelo k monotónnímu zvyšování osového napětí od nuly do předepsané hodnoty  $\sigma_0$ . Prut je potom uvolněn zpět do nenapjatého stavu a následně zatížen na vyšší hladinu napětí  $\sigma_1$ . Křivka napětí-deformace následuje cestu  $O_0Y_0Z_0O_1Y_1Z_1$ . V této cestě je počáteční úsečka  $O_0Y_0$  prakticky rovná a v případě, že prut je uvolněn z bodu  $Y_0$  (nebo před tím, než je ho dosaženo), vrátí se do původního nenapjatého stavu  $O_0$ . V části  $O_0Y_0$  je chování materiálu považováno za lineárně-elastické. Za  $Y_0$  se sklon křivky napětí-deformace dramaticky změní a pokud je napětí (nebo zatížení) obráceno na, řekněme, bod  $Z_0$ , prut se vrátí do nenapjatého stavu přes cestu  $Z_0O_1$ . Nový nenapjatý stav  $O_1$  se liší od původního nenapjatého stavu  $O_0$  v pozorování trvalé změny tvaru prutu. Tato změna tvaru je reprezentována v grafu trvalých (nebo plastických) axiálních deformací  $\varepsilon^p$ . Pak následuje monotónní přitěžování prutu až na hodnotu napětí  $\sigma_1$ , po cestě  $O_1Y_1Z_1$ . Stejně jako v případě první elastické části  $O_0Y_0$ , je část  $O_1Y_1$  také prakticky rovná a odtěžování z  $Y_1$  (nebo než je  $Y_1$  dosaženo) přinese křivku napětí-deformace zpět do nenapjaté konfigurace  $O_1$ , bez dalších plastických namáhání prutu. Proto může být chování materiálu v části  $O_1Y_1$  považováno za lineárně-elastické. Zde je důležité zdůraznit, že i když je v typických experimentech pozorován určitý rozpor mezi

odtěžovacími a přitěžovacími křivkami (jako jsou linky  $Z_0O_1$  a  $O_1Y_1$ ), skutečný rozdíl mezi nimi je ve skutečnosti mnohem menší, než je uvedeno v diagramu obrázek 1.1.1. Opětné zatěžování nad rámec meze pružnosti (bod  $Y_1$  v tomto případě) způsobí další zvýšení plastické deformace.

Některé důležité fenomenologické vlastnosti mohou být identifikovány ve výše popsaném jednoosém testu. Jsou vyjmenovány níže:

1. Existence elastické oblasti, tj. rozsah napětí, ve kterém chování materiálu může být považováno za čistě elastické, bez vývoje trvalé (plastické) změny. Elastická doména je vymezena tzv. mezí kluzu. Na obrázku 1.1.1, části  $O_0Y_0$  a  $O_1Y_1$  definuje elastickou doménu ve dvou různých stavech. Související poddajná napětí odpovídají bodům  $Y_0$  a  $Y_1$ .
2. Pokud je materiál dále zatěžován na mez kluzu, potom dochází k plastické poddajnosti (a plastickému tečení), a vývoji plastického napětí.
3. Je také pozorován doprovodný vývoj plastické deformace i samotný vývoj meze kluzu (povšimněme si, že meze kluzu odpovídající bodům  $Y_0$  a  $Y_1$  jsou odlišné). Tento jev je znám jako kalení.



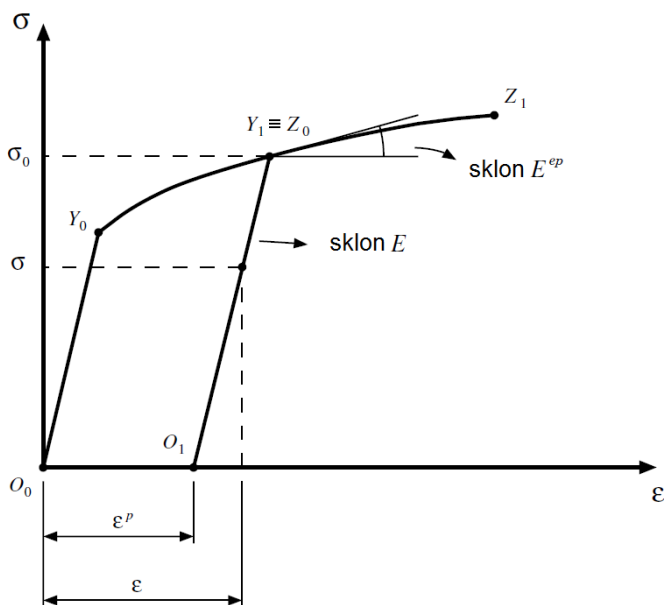
Obrázek 1.1.1 Zkouška jednoosým tahem pro tvárné kovy podle Neta [1].

Je třeba zdůraznit, že výše uvedené vlastnosti lze pozorovat nejen v kovech, ale také v široké škále dalších materiálů, jako je beton, horniny, půdy a mnoho dalších. Je ale zřejmé, že mikroskopické mechanismy, které vedou k těmto společným fenomenologickým charakteristikám, budou zcela odlišné pro různé typy materiálů. Je také důležité poznamenat, že v závislosti na typu materiálu, mohou být nezbytné experimentální postupy pro ověření těchto vlastností různé. Například v materiálech jako jsou půdy, které obvykle nemohou odolat tahovým napětím, nemají jednoosé tahové zkoušky fyzikální smysl. V tomto případě jsou vhodné experimenty, jako triaxiální smykové zkoušky, ve kterých jsou strany vzorku podrobeny hydrostatickému tlaku před aplikací podélné komprese.

Předmětem matematické teorie plasticity je definovat konstitutivní modely kontinua schopné popisovat kvalitativně a kvantitativně s dostatečnou přesností fenomenologické chování materiálů, jejichž charakteristické znaky byly projednány výše.

## 1.2 JEDNO-DIMENZIONÁLNÍ KONSTITUTIVNÍ MODEL

Jednoduchý matematický model jednoosého experimentu, který je popsán v předchozí části, je formulován v následujícím textu. Navzdory své jednoduchosti jednorozměrného konstitutivního modelu obsahuje všechny základní funkce, které jsou základem matematické teorie plasticity. Na počátku, původní křivka napětí-deformace, obrázek 1.1.1, která vede od zatížení, což je popsáno v předchozí části, je aproximována idealizovanou verzí znázorněnou na obrázku 1.2.1. Předpoklady, které se podílejí na aproximaci, jsou shrnuty dále. Za prvé, rozdíl mezi zatěžovací a odtěžovací křivkou (část  $Z_0O_1$  a  $O_1Y_1$  na obrázku 1.1.1) je ignorován a předpokládá se, že body  $Z_0$  a  $Y_1$ , které odpovídají začátku odtěžování a nástupu plastického přetváření při následném přitěžování, jsou shodné. Přechod mezi elastickou částí a elasticko-plastickým režimem je nyní jasně označen neplynulou změnou sklonu (body  $Y_0$  a  $Y_1$ ). Během plastického přetváření křivka napětí-deformace vždy následuje cestu popsanou  $O_0Y_0Y_1Z_1$ . Tato cesta je obvykle označována jako základní křivka (virgin curve) a je jí dosaženo při kontinuálním monotónním zatížení od počátečního nenapjatého stavu  $O_0$ .



Obrázek 1.2.1 Zkouška jednoosým tahem. Matematický model podle Neta [1].

Podle výše uvedených předpokladů, je po monotónním zatížení z počátečního nenapjatého stavu k úrovni napětí  $\sigma_0$  chování prutu mezi stavy  $O_1$  a  $Y_1$  považováno za lineárně-elastické, s konstantní plastickou deformací  $\varepsilon^p$  a mezí kluzu  $\sigma_0$ . V části  $O_1Y_1$  je jednoosé napětí odpovídající konfiguraci s celkovou deformací  $\varepsilon$  dáno vztahem

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (1)$$

kde  $E$  značí Youngův modul pružnosti materiálu prutu. Všimněte si, že rozdíl mezi celkovou deformací a současnou plastickou deformací  $\varepsilon - \varepsilon^p$ , je plně reverzibilní, to znamená, že po kompletním odtížení prutu,  $\varepsilon - \varepsilon^p$  se při opětovném zatížení materiál chová lineárně, bez dalšího vývoje plastické deformace, pokud není znova dosaženo meze plasticity. Tento děj aditivního rozkladu axiální deformace je popsán v následující části.

### 1.2.1 ELASTOPLASTICKÝ ROZKLAD AXIÁLNÍHO (OSOVÉHO) NAMÁHÁNÍ

Jednou z hlavních hypotéz, které jsou základem malých deformací teorie plasticity je rozklad z celkové deformace  $\varepsilon$ , na součet elastické (vratné) složky  $\varepsilon^e$ , a plastické (trvalé) složky  $\varepsilon^p$ ,

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \quad (2)$$

kde je elastická deformace definována jako



$$\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^p. \quad (3)$$

### 1.2.2 ELASTICKÝ JEDNOOŠÝ KONSTITUTIVNÍ ZÁKON

Výše byla uvedena definice elastického axiálního napětí. Konstitutivní zákon pro axiální napětí může být vyjádřen jako

$$\sigma = E \cdot \varepsilon^e. \quad (4)$$

Dalším krokem v definici jednoosého konstitutivního modelu, je odvození vzorců, které matematicky popisují základní fenomenologické vlastnosti uvedené v kapitole 1 Fenomenologické aspekty. Body 1 a 2, z uvedené kapitoly, jsou spojeny s formulací kritéria plasticity a plastického tečení, zatímco bod 3 vyžaduje formulaci zákona zpevnění.

### 1.2.3 FUNKCE A KRITÉRIUM PLASTICITY

Existence elastické oblasti vymezené mezí kluzu, byla probrána v bodě 1 kapitoly 1. Se zavedením funkce plasticity  $\Phi$ , ve formě

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) = |\sigma| - \sigma_y, \quad (5)$$

může být elastická oblast ve vztahu s jednoosým plastickým napětím  $\sigma_y$  definována v jednodimenzionálním plastickém modelu jako soubor

$$\mathcal{E} = \{ \sigma \mid \Phi(\sigma, \sigma_y) < 0, \quad (6)$$

nebo ekvivalentně, elastická oblast je soubor napětí  $\sigma$ , která splňují

$$|\sigma| < \sigma_y. \quad (7)$$

Zobecnění výsledků diskutovaných v testu s jednoosým tahem předpokládalo, že napětí na mezi kluzu v tlaku je stejné jako v tahu. Odpovídající idealizovaná oblast je znázorněna na obrázku 1.2.3.1.

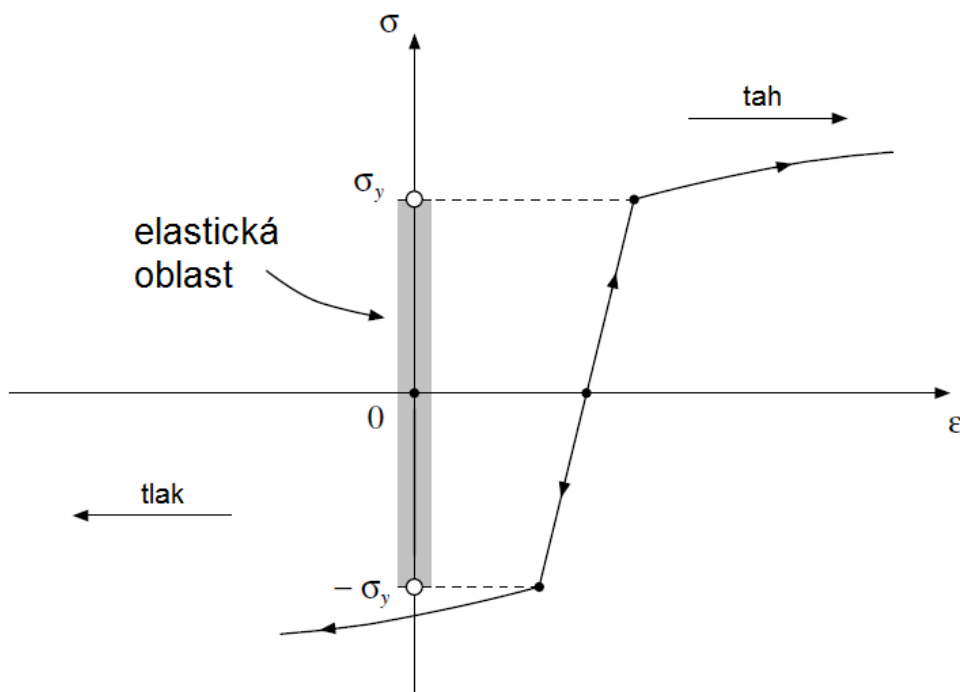
Je nutné poznamenat, že pro žádnou úroveň deformace, není možné, aby napětí překročilo danou mez kluzu, tj. že plasticky přípustné napětí leží buďto v elastické oblasti nebo na její hranici (tj. na mezi kluzu). Proto musí každé přípustné namáhání splňovat omezení

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) \leq 0. \quad (8)$$

Při namáhání v rámci pružné oblasti, může nastat pouze elastická deformace. Vzhledem k hranici pružného namáhání (tj. na mezi kluzu), probíhá buďto elastické odtěžování, pokud nebylo dosaženo meze plasticity, nebo plastické přetváření (případně plastické přitěžování). Toto kritérium plasticity může být vyjádřeno

$$\text{kdýž } \Phi(\sigma, \sigma_y) < 0 \Rightarrow \dot{\epsilon}^p = 0, \quad (9)$$

$$\text{kdýž } \Phi(\sigma, \sigma_y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\epsilon}^p = 0 & \text{pro elastické odtěžování} \\ \dot{\epsilon}^p \neq 0 & \text{pro plastické přitěžování} \end{cases} \quad (10)$$



Obrázek 1.2.3.1 Jednoosý model. Elastická oblast podle Neta [1].

#### 1.2.4 ZÁKON PLASTICKÉHO TEČENÍ. ZATĚŽOVACÍ A ODTĚŽOVACÍ KŘIVKA

Výrazy (9) a (10) definovaly kritérium plasticity, tj. že byly nastaveny podmínky, za kterých může dojít k plastickým namáháním. V obrázku 1.2.3.1 bylo znázorněno, že na základě plastického zatěžování, byla míra plastické deformace  $\dot{\epsilon}^p$  kladná (tahová) pod tahem (kladné  $\sigma$ ) a záporná (tlaková) pod tlakem (záporné  $\sigma$ ). Plastický zákon tečení může být formálně stanoven jako

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \cdot \sin(\sigma), \quad (11)$$

kde  $\sin$  je sinusová funkce definovaná jako

$$\sin(a) = \begin{cases} +1 & \text{když } a \geq 0 \\ -1 & \text{když } a < 0 \end{cases} \quad (12)$$

všechny skaláry  $a$  a skaláry  $\dot{\gamma}$  se nazývají plastický násobitel. Plastický násobitel je nezáporný

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad (13)$$

a splňuje podmínku komplementarity

$$\Phi \dot{\gamma} = 0. \quad (14)$$

Z konstitutivních rovnic (11) až (14) plyne, jak je uvedeno v kritériu plasticity (10), že plastická deformace v elastické oblasti je rovna nule, tj.

$$\Phi < 0 \Rightarrow \dot{\gamma} = 0 \Rightarrow \dot{\epsilon}^p = 0, \quad (15)$$

a plastické tečení ( $\dot{\epsilon}^p = 0$ ) může nastat pouze tehdy, když se úroveň napětí  $\sigma$  shoduje s danou mezí kluzu

$$|\sigma| = \sigma_y \Rightarrow \Phi = 0 \Rightarrow \dot{\gamma} \geq 0. \quad (16)$$

Výrazy (8), (13) a (14) definují tzv. podmínky zatěžování a odtěžování elastoplastického modelu, to znamená, že omezení

$$\Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\gamma} \Phi = 0, \quad (17)$$

stanoví, kdy může dojít k plastickému tečení.

### 1.2.5 ZÁKON ZPEVNĚNÍ

V závěru kompletní charakteristiky jednoosého modelu docházíme k zákonu zpevnění. Výše bylo uvedeno, že vývoj plastické deformace je doprovázen vývojem meze kluzu. Tento jev, který známe jako zpevnění, může být začleněn do jednoosého modelu za předpokladu, že v definici (5) je mez kluzu  $\sigma_y$  daná funkcí

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p) \quad (18)$$

celkových axiálních plastických deformací  $\bar{\varepsilon}^p$ . Celkové axiální plastické deformace jsou definovány

$$\bar{\varepsilon}^p \equiv \int_0^t |\dot{\varepsilon}^p| dt, \quad (19)$$

což zajišťuje, že tahové i tlakové plastické deformace přispívají k  $\bar{\varepsilon}^p$ . Je zřejmé, že v monotónní tahové zkoušce platí

$$\bar{\varepsilon}^p = \varepsilon^p, \quad (20)$$

zatímco v monotónní tlakové jednoosé zkoušce platí

$$\bar{\varepsilon}^p = -\varepsilon^p. \quad (21)$$

Křivka definující zpevnění funkce  $\sigma_y(\bar{\varepsilon}^p)$  je obvykle označována jako křivka zpevnění, viz obrázek 1.2.6.1.

Z definice  $\bar{\varepsilon}^p$ , následuje vývoj zákona, vyjádřeného vztahem

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = |\dot{\varepsilon}^p|, \quad (22)$$

který je, s ohledem na zákon plastického tečení, ekvivalentní s výrazem

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}. \quad (23)$$

## 1.2.6 ZÁVĚREČNÉ SHRNUÍ MODELU

Elastoplastický konstitutivní model jednoosého namáhání je definován vztahy

$$\text{elastoplastický rozklad osového namáhání} \quad \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \quad (2)$$

$$\text{konstitutivní zákon pro jednoosé napětí} \quad \sigma = E \varepsilon^e, \quad (4)$$

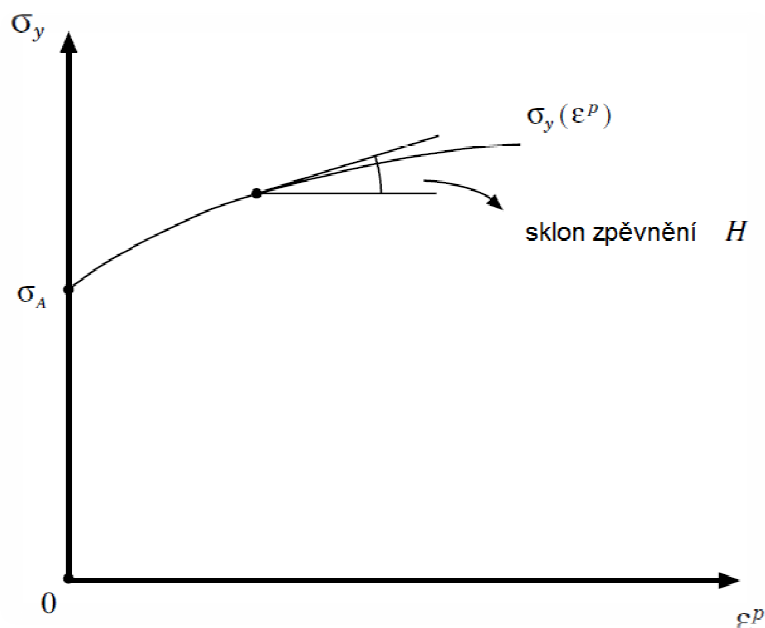
$$\text{funkce plasticity} \quad \Phi(\sigma, \sigma_y) = |\sigma| - \sigma_y, \quad (5)$$

$$\text{plastický zákon tečení} \quad \dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \sin(\sigma), \quad (11)$$

$$\text{podmínky zatěžování a odtěžování modelu} \quad \Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\gamma} \Phi = 0, \quad (17)$$

$$\text{zákon zpevnění} \quad \sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p), \quad (18)$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}. \quad (19)$$



Obrázek 1.2.6.1 Jednoosý model. Křivka zpevnění podle Neta [1].

## 1.2.7 STANOVENÍ PLASTICKÉHO NÁSOBITELE

Prozatím byl v jednoosém plastickém modelu plastický násobitel  $\dot{\gamma}$  během plastického přetváření ponechán neurčitý. Ve skutečnosti výrazy (12) a (13) vyjadřují, že  $\dot{\gamma}$  vymizí během elastického přetváření, ale během plastického tečení lze předpokládat nezáporné hodnoty. Za účelem odstranění této neurčitosti, je nutné především poznamenat, že v průběhu plastického tečení, zůstává hodnota funkce plasticity konstantní

$$\Phi = 0, \quad (24)$$

protože absolutní hodnota aktuálního napětí se vždy shoduje s aktuálním plastickým napětím. Proto může být následující doplňující podmínka komplementarity stanovena jako

$$\Phi \dot{\gamma} = 0 \quad (25)$$

z čehož vyplývá, že míra funkce plasticity  $\Phi$  vymizí, kdykoliv plastické přetváření dosáhne hodnoty  $\dot{\gamma} \neq 0$ ,

$$\dot{\Phi} = 0, \quad (26)$$

během elastického přetváření  $\dot{\gamma} = 0$ , může  $\dot{\Phi}$  mít jakoukoliv hodnotu. Rovnice (26) se nazývá podmínka konzistence. Derivací funkce plasticity podle času, rovnice (5), je získán vztah

$$\dot{\Phi} = \sin(\sigma) \dot{\sigma} - H \dot{\bar{\epsilon}}^p, \quad (27)$$

kde  $H$  se nazývá modul zpevnění, nebo sklon zpevnění, viz obrázek 1.2.6.1, a je definován vztahem

$$H = H(\bar{\epsilon}^p) = \frac{\partial \sigma_y}{\partial \bar{\epsilon}^p}. \quad (28)$$

Podle plastického přetváření, z rovnice (26) může být vyjádřen následující výraz pro míru napětí

$$\sin(\sigma) \dot{\sigma} = H \dot{\bar{\epsilon}}^p. \quad (29)$$

Z elastického zákona potom plyne výraz

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\bar{\epsilon}} - \dot{\bar{\epsilon}}^p). \quad (30)$$

Kombinací výše uvedeného výrazu s rovnicemi (23), (29) a (10), je konečně plastický násobitel  $\dot{\gamma}$  jednoznačně určen během plastického přetváření následujícím výrazem



$$\dot{\gamma} = \frac{E}{H + E} \sin(\sigma) \dot{\epsilon} = \frac{E}{H + E} |\dot{\epsilon}|. \quad (31)$$

### 1.2.8 ELASTOPLASTICKÝ TEČNÝ MODUL

Již dříve byla zmíněna křivka napětí-deformace, viz obrázek 1.2.1. Plastické tečení na obecné mezi kluzu vede k následujícímu vztahu mezi deformací a napětím

$$\dot{\sigma} = E^{ep} \dot{\epsilon}, \quad (32)$$

kde  $E^{ep}$  se nazývá elastoplastický tečný modul. Kombinací výrazů (32), (30) a zákona tečení (10) získáme následující vztah pro elastoplastický tečný modul

$$E^{ep} = \frac{E H}{E + H}. \quad (33)$$

Ekvivalentně může být vyjádřen modul zpevnění  $H$  pomocí modulu pružnosti a elastoplastického tečného modulu jako

$$H = \frac{E^{ep}}{1 - \frac{E^{ep}}{E}}. \quad (34)$$

## 1.3 KLASICKÁ KRITÉRIA PLASTICITY

Obecný konstitutivní model pro elastoplastický materiál byl popsán v předešlé části. Kritérium plasticity zde bylo uvedeno v jeho obecné podobě, bez ohledu na jakákoliv jednotlivá kritéria. Existují však specifická kritéria, která jsou běžně užívána v inženýrské praxi. Jde o kritérium Trescovo, von Misesovo, Mohr-Coulombovo a Drucker-Pragerovo. V inženýrské praxi nejčastěji používaná kritéria, Trescovo a von Misesovo budou podrobněji rozebrána v následujícím textu.

### 1.3.1 TRESCOVO KRITÉRIUM PLASTICITY

Toto kritérium bylo navrženo Trescou v roce 1868 pro popis plastického přetváření v kovech. Kritérium plasticity podle něj předpokládá, že plastické přetváření začíná, když maximální smykové napětí dosáhne kritické hodnoty.

Pro připomenutí je uvedeno spektrální vyjádření tenzoru napětí,

$$\sigma = \sum_{i=1}^3 \sigma_i e_i \otimes e_i, \quad (35)$$

kde  $\sigma_i$  je hlavní napětí a  $e_i$  jsou související jednotkové vlastní vektory. A  $\sigma_{\max}$  a  $\sigma_{\min}$ , respektive maximum a minimum hlavního napětí je vyjádřeno z

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); \\ \sigma_{\min} &= \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \end{aligned} \quad (36)$$

Maximální smykové napětí  $\tau_{\max}$  je dáno vztahem

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}). \quad (37)$$

Podle Trescova kritéria je nástup plastického přetváření definován podmínkou

$$\frac{1}{2} (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \tau_y(\alpha), \quad (38)$$

kde  $\tau_y$  je smykové napětí na mezi kluzu, předpokládá se, že funkce zpevnění vnitřních proměnných  $\alpha$ , budou definovány později. Smykové napětí na mezi kluzu je mez plasticity za stavu čistého smyku.

Vzhledem ke vztahu (38), může být funkce plasticity spojená s Trescovým kritériem plasticity vyjádřena jako

$$\Phi(\sigma) = \frac{1}{2} (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) - \tau_y(\alpha), \quad (39)$$

s nástupem plastizování, charakterizovaného  $\Phi = 0$ . Případně může být Trescova funkce plasticity definována jako

$$\Phi(\sigma) = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) - \sigma_y(\alpha), \quad (40)$$

kde  $\sigma_y$  je jednoosé napětí na mezi kluzu

$$\sigma_y = 2 \tau_y, \quad (41)$$

to znamená, že jde o úroveň napětí, při kterém začíná plastické přetváření při jednoosém napětí. Zda je  $\sigma_y$  skutečně jednoosé napětí na mezi kluzu

pro Trescovu podmínku plasticity, může být určeno tím, že plastické přetváření vzniká při jednoosém napětí, kdy platí

$$\sigma_{\max} = \sigma_y, \quad \sigma_{\min} = 0. \quad (42)$$

Nahrazením výrazu (42) výrazem (38) je získána závislost (41). Pružná oblast pro Trescovo kritérium plasticity může být definována jako

$$\mathcal{E} = \{ \boldsymbol{\sigma} \mid \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y) < 0 \}. \quad (43)$$

#### 1.3.1.1 NECITLIVOST NA TLAK

Vzhledem k definici výlučně z hlediska smykového napětí, je Trescovo kritérium tlakově necitlivé, to znamená, že složka hydrostatického tlaku,

$$p \equiv \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}] = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (44)$$

tenzoru napětí nemá vliv na plastizování. Z důvodu, že superpozice libovolného tlaku  $p^*$ , na tenzoru napětí nemá vliv na hodnotu Trescovy funkce plasticity

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma} + p^* \mathbf{I}) = \Phi(\boldsymbol{\sigma}). \quad (45)$$

Necitlivostí na tlak se vyznačuje také von Misesovo kritérium plasticity. Tato vlastnost je zvláště důležitá pro modelování kovů, pro tyto materiály se vliv hydrostatického tlaku na plastizování v praxi zanedbává.

### 1.3.1.2 IZOTROPIE

Jedním z velmi důležitých aspektů Trescova kritéria je jeho izotropie. Touto vlastností se vyznačuje i kritérium von Misesovo, Mohr-Coulombovo a Drucker-Pragerovo. Vzhledem k tomu, že je funkce plasticity  $\Phi$  ve výrazech (39) a (40) definována jako funkce hlavních napětí, je Trescovo kritérium plasticity izotropní funkce napětí, tj. splňuje

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \Phi(\mathbf{R} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}^T) \quad (46)$$

pro všechny rotace  $\mathbf{R}$ ; tj. rotace napjatosti nemají vliv na hodnotu funkce plasticity.

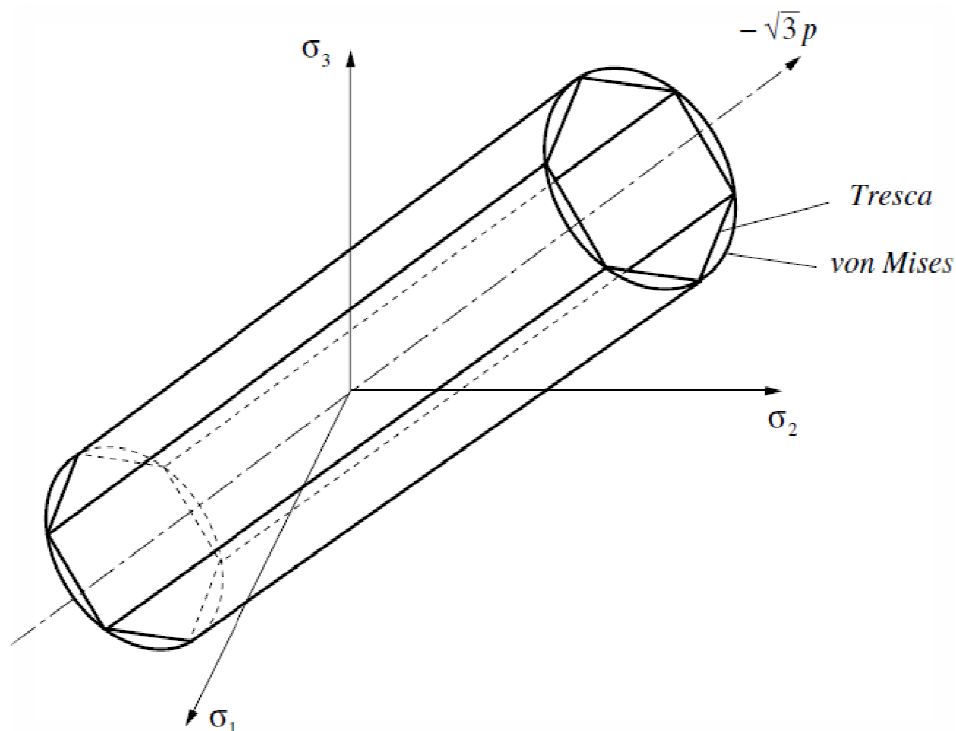
Můžeme říci, že kritérium plastického přetvoření je izotropní, pokud je funkce plasticity tenzoru napětí izotropní.

### 1.3.1.3 GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ

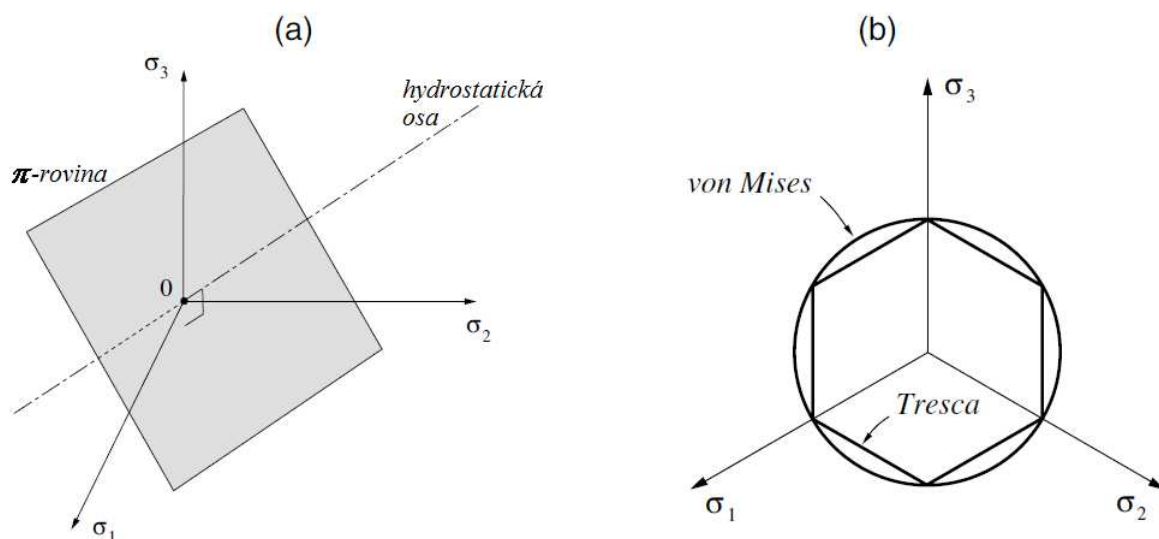
Protože každá izotropní skalární funkce symetrického tenzoru může být popsána jako funkce hlavní hodnoty jejího argumentu, to znamená, že každá izoplocha (tj. libovolná podmnožina funkce oblasti s pevnou funkční hodnotou) těchto funkcí může být graficky znázorněna jako povrch v prostoru hlavních hodnot argumentu. To umožňuje především plastický povrch, definován vztahem

$$\mathcal{Y} = \{ \boldsymbol{\sigma} \mid \Phi(\boldsymbol{\sigma}, A) = 0 \}. \quad (47)$$

jakéhokoli izotropického kritéria plasticity zastoupeného v obzvláště jednoduchém a užitečném formátu, jako třídímní povrch v prostoru hlavních napětí.



Obrázek 1.3.1.3.1 Trescovy a von Misesovy plochy plasticity v prostoru hlavních napětí podle Neta [1].



Obrázek 1.3.1.3.2 (a) Rovina  $\pi$  v prostoru hlavních napětí, (b) rovina  $\pi$  představující Trescovu a von Misesovu plochu plasticity podle Neta [1].

Trescova plastická plocha, tj. soubor namáhání, pro které je funkce plasticity  $\Phi=0$ , je v prostoru hlavních napětí graficky znázorněna plochou nekonečného šestihranného hranolu s osou shodnou s hydrostatickou linií (také známý jako prostor diagonální), definován  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Toto je znázorněno na obrázku 1.3.1.3.2. Elastická oblast (pro kterou platí  $\Phi < 0$ ) odpovídá vnitřnímu hranolu. Vzhledem k předpokládané necitlivosti na tlak, je možné využít v tomto případě dalšího zjednodušení této plochy plasticity. Trescova plocha plasticity může být reprezentována, bez ztráty obecnosti, její projekcí na podprostor napětí s nulovou tlakovou složkou  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ . Tento podprostor se nazývá deviatorická rovina, která je také označována jako  $\pi$ -rovina. To je graficky znázorněno na obrázku 1.3.1.3.2(a). Obrázek 1.3.1.3.2(b) ukazuje projekci  $\pi$ -roviny Trescovy plochy plasticity.

#### 1.3.1.4 FORMULACE POMOCÍ VÍCE PLOCH

Ekvivalentně k výše uvedené formulaci, může být Trescovo kritérium plasticity vyjádřeno pomocí následujících šesti plastických funkcí

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(\sigma, \sigma_y) &= \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_y \\
 \Phi_2(\sigma, \sigma_y) &= \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_y \\
 \Phi_3(\sigma, \sigma_y) &= \sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_y \\
 \Phi_4(\sigma, \sigma_y) &= \sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_y \\
 \Phi_5(\sigma, \sigma_y) &= \sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_y \\
 \Phi_6(\sigma, \sigma_y) &= \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_y
 \end{aligned} \tag{48}$$

tak, že pro pevné  $\sigma_y$ , rovnice

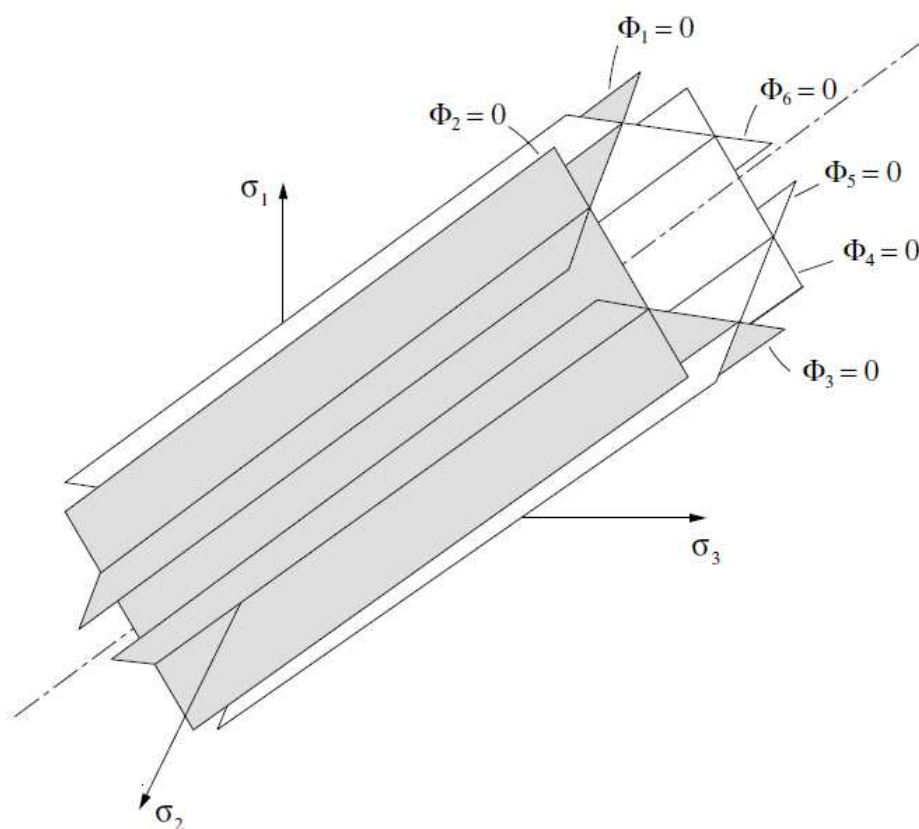
$$\Phi_i(\sigma, \sigma_y) = 0 \tag{49}$$

odpovídá rovině v prostoru hlavních napětí pro každé  $i=1, \dots, 6$ , viz obrázek 1.3.1.4.1.

Ve víceplošné formulaci může být elastická oblast dána napětím  $\sigma_y$ , definována jako

$$\mathcal{E} = \{ \sigma \mid \Phi_i(\sigma, \sigma_y) < 0, i=1, \dots, 6 \}. \quad (50)$$

Definice (43) a (50) jsou zcela rovnocenné. Plastická plocha – hranice  $\mathcal{E}$  – je definována v tomto případě jako soubor napětí, pro které  $\Phi_i(\sigma, \sigma_y) = 0$  pro alespoň jedno  $i$  s  $\Phi_j(\sigma, \sigma_y) \leq 0$  pro  $j \neq i$ .



Obrázek 1.3.1.4.1 Trescovo kritérium plasticity. Víceplošná reprezentace v prostoru hlavních napětí podle Neta [1].



### 1.3.1.5 FORMULACE POMOCÍ INVARIANTŮ

Trescovo kritérium plasticity lze také popsat pomocí invariantů napětí. Invariantní reprezentací, navrženou Nayakem a Zienkiewiczem (1972), získává funkce plasticity tvar

$$\Phi = 2 \sqrt{J_2} \cos \theta - \sigma_y, \quad (51)$$

kde  $J_2 = J_2(s)$  je invariant deviátoru napětí  $s$ , definovaného

$$J_2 \equiv -I_2(s) = \frac{1}{2} \text{tr}[s^2] = \frac{1}{2} s:s = \frac{1}{2} \|s\|^2. \quad (52)$$

Přitom deviátor napětí je dán vztahem

$$s \equiv \sigma - \frac{1}{3} (\text{tr } \sigma) I. \quad (53)$$

Úhel  $\theta$  (lode angle), je funkcí deviatorického napětí definovaného

$$\theta \equiv \frac{1}{3} \sin^{-1} \left( \frac{-3\sqrt{3} J_3}{2 J_2^{\frac{3}{2}}} \right), \quad (54)$$

kde  $J_3$  je třetí hlavní invariant deviátoru napětí

$$J_3 \equiv I_3(s) \equiv \det s = \frac{1}{3} \text{tr}(s)^3. \quad (55)$$

Úhel  $\theta$  je úhel na deviatorické rovině, mezi  $s$  a nejbližší linií čistého smyku. Linie čistého smyku je graficky znázorněna na obrázku 1.3.2.1. Úhel splňuje podmínku

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}. \quad (56)$$

Přestože je často využívána ve výpočtech plasticity, jsou z invariantní formulace získány výsledky v podobě složitějších algoritmů pro integraci rovnic Trescova modelu. To je způsobeno v důsledku vysokého stupně nelinearity zavedenými goniometrickými funkcemi podílejícími se na definici úhlu  $\theta$ . Na druhé straně víceplošná formulace zajišťuje optimální parametrizaci Trescova povrchu, což má za následek jednodušší numerické algoritmy.

### 1.3.2 VON MISESOVO KRITÉRIUM PLASTICITY

Von Mises (1913) definoval kritérium pro popis plastického přetváření v kovových materiálech. Podle von Misesova kritéria dochází k počátku plastického přetváření, když invariant deviatoru napětí  $J_2$  dosáhne kritické hodnoty. Tato podmínka je matematicky znázorněna rovnicí

$$J_2 = R(\alpha), \quad (57)$$

kde  $R$  je kritická hodnota vnitřních proměnných funkcí zpevnění  $\alpha$ .

Vzhledem k elastickému chování materiálů se předpokládá, že jde o materiály lineárně elastické. Uchovaná hustota energie pružného přetvoření v obecném stavu, definovaná napětím  $\sigma$ , může být rozložena na součet

$$\psi^e = \psi_d^e + \psi_v^e, \quad (58)$$

deviatorického příspěvku

$$\bar{\rho} \psi_d^e = \frac{1}{2G} s : s = \frac{1}{G} J_2, \quad (59)$$

a volumetrického příspěvku

$$\bar{\rho} \psi_v^e = \frac{1}{K} p^2, \quad (60)$$

kde  $G$  je smykový modul pružnosti a  $K$  je objemový modul pružnosti. Vzhledem k rovnici (59), je von Misesovo kritérium ekvivalentní s tvrzením, že plastické přetváření začíná, když pružná energie deviatorické složky přetvoření dosáhne kritické hodnoty. Odpovídající kritická hodnota deviatorické energie je

$$\frac{1}{G} R. \quad (61)$$

Stejně jako v Trescovu kritériu plasticity, tlaková složka tenzoru napětí nemá vliv na definici von Misesova kritéria a plastické přetváření může ovlivnit pouze deviatorické napětí. To znamená, že von Misesovo kritérium plasticity je také tlakově necitlivé.

Stav čistého smyku, tj. vztah s tenzorem napětí

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (62)$$

kde  $s = \sigma$  a

$$J_2 = \tau^2. \quad (63)$$

Lze tedy funkci plasticity pro von Misesovo kritérium definovat jako

$$\Phi(\sigma) = \sqrt{J_2(s(\sigma))} - \tau_y, \quad (64)$$

kde  $\tau_y \equiv \sqrt{R}$  je smykové napětí na mezi kluzu. Pokud je uvažován stav jednoosého namáhání, potom platí

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (65)$$

V tomto případě je získáno

$$[s] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix} \quad (66)$$

a

$$J_2 = \frac{1}{3}\sigma^2. \quad (67)$$

Výraz pro invariant  $J_2$  umožňuje alternativní definici pro von Misesovu funkci plasticity:

$$\Phi(\sigma) = q(\sigma) - \sigma_y, \quad (68)$$

kde  $\sigma_y \equiv \sqrt{3R}$  je jednoosé napětí na mezi kluzu a

$$q(\sigma) \equiv \sqrt{3J_2(s(\sigma))} \quad (69)$$

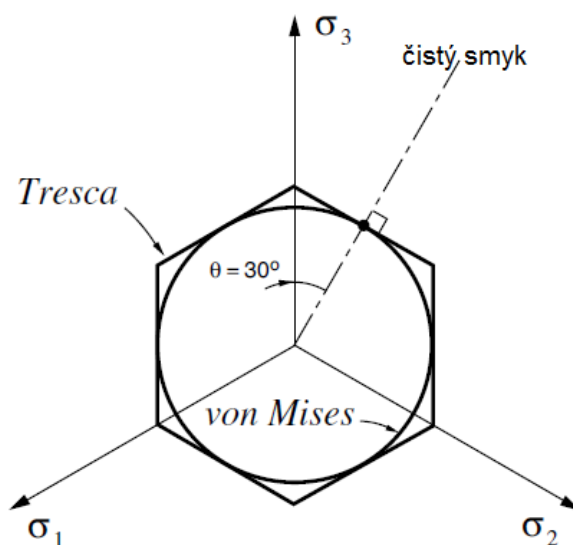
je von Misesovo efektivní nebo ekvivalentní napětí. Existuje následující souvislost jednoosého a smykového napětí na mezi kluzu pro von Misesovo kritérium

$$\sigma_y = \sqrt{3} \tau_y. \quad (70)$$

Tento vztah se liší od Trescova kritéria daného vztahem (41). Vzhledem k definici invariantu tenzoru napětí, je von Misesova funkce napětí anizotropní funkce  $\sigma$ .

Von Misesovo a Trescovo kritérium může být stanoveno tak, aby mezi sebou souhlasily buď v jednoosém napětí, nebo čistě smykovém stavu. Jsou-li nastaveny pomocí funkcí plasticity, podle vztahů (40) a (68), tak, že obě předpokládají stejné jednoosé napětí na mezi kluzu  $\sigma_y$ , potom v čistém smyku bude von Misesovo kritérium produkovat napětí na mezi kluzu  $2/\sqrt{3} (\approx 1.155)$  krát vyšší než napětí dané Trescovým kritériem. Na druhé straně, pokud jsou kritéria nastavena pro shodu v čistém smyku, podle výrazů (39) a (64) se shodným  $\tau_y$ , potom ve stavu jednoosého napětí nabývá von Misesovo kritérium úroveň napětí  $\sqrt{3}/2 (\approx 0.866)$  krát vyšší než úroveň daná Trescovým zákonem.

Plocha plasticity  $\Phi = 0$  definovaná pro von Misesovo kritérium, je zastoupena v prostoru hlavních napětí povrchem nekonečného kruhového válce s osou, která se shoduje s osou hydrostatickou. Von Misesův povrch je znázorněn na obrázku 1.3.1.3.1, byl nastaven tak, aby odpovídal Trescovu povrchu v jednoosém napětí. Odpovídající prezentace  $\pi$ -roviny je znázorněna na obrázku 1.3.1.3.2(b). Von Misesův kruh protíná vrcholy Trescova šestiúhelníku. Plochy plasticity pro von Misesovo a Trescovo kritérium stanovené pro shodu ve smyku jsou znázorněny na obrázku 1.3.2.1.



Obrázek 1.3.2.1 Plastické plochy pro Trescovo a von Misesovo kritérium shodné v čistém smyku podle Neta [1].

V tomto případě je von Misesův kruh tečný ke stranám Trescova šestiúhelníku. Pro mnoho kovů spadají experimentálně stanovené plastické plochy mezi von Misesův a Trescův povrch.

## 2 GEOMETRICKÁ NELINEARITA

### 2.1 MÍRY DEFORMACE

V lineární mechanice je používán tenzor deformace  $\varepsilon$ . Jde o přibližné řešení, které platí s přesností dostačující pouze pro malé rotace a malé deformace. Rotace má v nelineární mechanice zásadní význam, protože způsobuje většinu problémů.

Pro požadavky nelineární mechaniky jsou využívány nelineární míry deformace. Jde především o požadavek, aby větší deformaci odpovídala větší míra deformace a aby mělo dokonale tuhé těleso nulovou deformaci.

#### 2.1.1 EULER-ALMANSIHO TENZOR DEFORMACE

Problematiku geometrické nelinearity zpracoval ve své publikaci Němec [4]. Euler-Almansiho tenzor deformace je vztažen k deformované (výsledné) konfiguraci, tzn. že derivování se provádí v prostorových souřadnicích.

Definice Euler-Almansiho tenzoru deformace v indexové notaci je dána výrazem

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}), \quad (71)$$

kde  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ .

V tenzorovém nebo maticovém zápise má výraz následující tvar

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \right) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right), \quad (72)$$

kde  $\mathbf{F}$  je deformační gradient,  $\mathbf{B}$  je levý Cauchy-Greenův deformační tenzor

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (73)$$

Euler-Almansiho tenzor deformace lze zapsat i s využitím prostorového gradientu vektorového pole posunutí

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} \left( (\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \nabla \mathbf{u} \right), \quad (74)$$

Existuje souvislost mezi Euler-Almansiho tenzorem deformace  $\mathbf{e}$  a Green-Langrangeovým tenzorem deformace  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1}, \quad (75)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}. \quad (76)$$

první rovnice je operace, která se nazývá „push forward“ pro Greenovu deformaci, druhá rovnice je operace „pull back“ pro Almansiho deformaci. Operace „push forward“ je proces mapování z původní (nedeformované) konfigurace na konfiguraci běžnou (deformovanou),  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ . Opačný proces, tedy mapování z běžné konfigurace na původní konfiguraci, se nazývá „pull back“,  $\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t)$ .



## 2.1.2 LOGARITMICKÁ MÍRA DEFORMACE

Logaritmická míra deformace bývá označována také jako Henckeho míra deformace. Značí se  $\varepsilon_n$ . Je definována přírůstkově a v každém přírůstku je vztažena k běžné konfiguraci. Vyjádření této míry deformace pro jednodimenzionální případ

$$d\varepsilon_n = \frac{dl}{l} \rightarrow \varepsilon_n = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = [\ln l]_{l_0}^l = \ln l - \ln l_0 = \ln \left( \frac{l}{l_0} \right) = \ln (1 + \varepsilon_x), \quad (76)$$

kde  $\varepsilon_x$  je lineární deformace,  $l_0$  je počáteční délka a  $l$  je výsledná délka.

Pro vyjádření dvou a třidimenzionálního případu lze pro logaritmickou míru deformace využít pravého stretch tenzoru  $\mathbf{U}$

$$\varepsilon_n = \ln \mathbf{U} = \ln \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}, \quad (77)$$

Pravý stretch tenzor je vyjádřen vztahem

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}. \quad (78)$$

Pravý stretch tenzor  $\mathbf{U}$  je tenzor 2. řádu, jeho spektrální dekompozicí může být určen logaritmický tenzor deformace  $\varepsilon_n$

$$\varepsilon_n = \sum_{i=1}^N \ln(\lambda_i) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T, \quad (79)$$

kde  $\lambda_i$ ,  $\mathbf{e}_i$  jsou vlastní čísla a vlastní vektory matice  $\mathbf{U}$  a  $N$  je dimenze prostoru.

Využití logaritmické míry deformace je vhodné u velkých deformací, kde  $|\varepsilon_x| \geq 0,05$ . Tak velké deformace u stavebních konstrukčních materiálů nenastávají, proto není nutné využívat tuto míru deformace.

### 2.1.3 INFINITEZIMÁLNÍ TENZORY DEFORMACE

Infinitezimální tenzor deformace, který je totožný s lineárním tenzorem deformace  $\varepsilon$ , dostaneme tehdy, nastane-li deformace tak malá, že je možné zanedbat členy 2. řádu v Greenovu tenzoru deformace  $\mathbf{E}$ .

V indexové notaci lze vztah zapsat jako

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (80)$$

V maticové, resp. tenzorové notaci, lze pro vyjádření infinitezimálního tenzoru využít materiálový gradient  $\nabla_0$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{1}{2} \left( \nabla_0 \mathbf{u} + (\nabla_0 \mathbf{u})^T \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{F} + \mathbf{F}^T) - \mathbf{I}, \quad (81)$$

kde  $\varepsilon$  je symetrická část materiálového gradientu posunutí  $\nabla_0 \mathbf{u}$ .

Pro definici infinitezimálního tenzoru deformace definovaného v prostorových souřadnicích  $\hat{\mathbf{e}}$ , je využita obdoba výrazů pro definici tenzoru  $\varepsilon$ , ale derivace jsou prováděny v prostorových souřadnicích  $\mathbf{x}$ .

V indexové notaci má výraz tvar

$$\hat{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (82)$$

V tenzorové notaci lze výraz zapsat ve tvaru

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} \right) = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) = \mathbf{I} - \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T}). \quad (83)$$

Bylo využito vztahu  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ , tedy

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1}. \quad (84)$$

Ve výrazu pro definování infinitezimálního tenzoru se vyskytuje prostorový gradient  $\nabla$ , tenzor  $\hat{\mathbf{e}}$  je v tomto případě symetrická část prostorového gradientu posunutí  $\nabla \mathbf{u}$ .

Význam infinitezimálního tenzoru  $\hat{\mathbf{e}}$  spočívá v tom, že je tento tenzor deformace energeticky konjugentní s Cauchyho napětím  $\boldsymbol{\sigma}$ .

## 2.1.4 POSOUZENÍ TENZORŮ DEFORMACE

### 2.1.4.1 TEST NA ROTACI TUHÉHO TĚLESA

Jak bylo uvedeno dříve, jedním z požadavků na míry deformace je, aby při pohybu tělesa jako tuhého celku, kdy je aplikována pouze translace a rotace, míry deformace poskytovaly nulovou deformaci při translaci tělesa.

Pro translaci a rotaci tělesa jako tuhého celku platí transformační rovnice

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{x}_T, \quad (85)$$

kde  $\mathbf{R}$  je tenzor rotace a  $\mathbf{x}_T$  je vektor posunutí počátku. Platí tedy, že

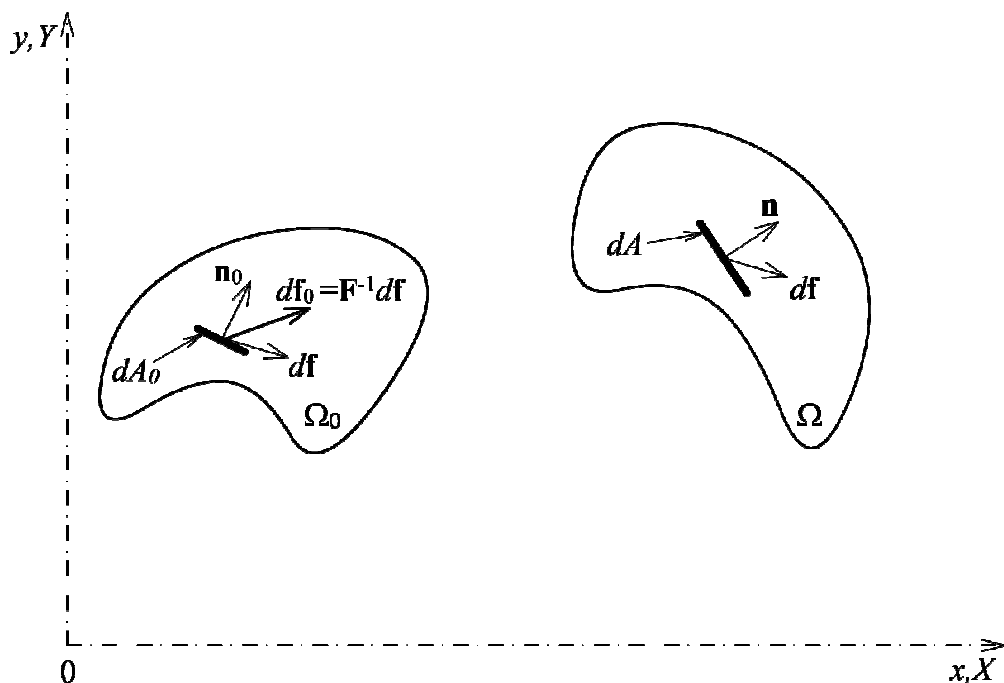
$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{R}. \quad (86)$$

Pokud se dosadí do výrazu pro Euler-Almansiho tenzor deformace místo deformačního gradientu tenzor rotace, dostaneme

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{R}^{-T} \cdot \mathbf{R}^{-1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T) = 0. \quad (87)$$

Platí, že pokud je matice rotace  $\mathbf{R}$  ortogonální, potom je ortogonální i matice  $\mathbf{R}^T$ . Tedy Euler-Almansiho tenzor deformace vyhovuje požadavku na nulovou deformaci při rotaci tělesa jako tuhého celku.

## 2.2 MÍRY NAPJATOSTI



Obrázek 2.2.1 Původní a výsledná konfigurace tělesa podle Němce [4].

|        |        |   |
|--------|--------|---|
| Pojmy: | $dA_0$ | infinitesimální ploška v tělese v původní konfiguraci,                          |
|        | $dA$   | infinitesimální ploška v běžné konfiguraci odpovídající plošce $dA_0$ ,         |
|        | $df_0$ | síla na nedeformovanou plošku $dA_0$ transformovaná do materiálových souřadnic, |
|        | $df$   | síla na plošku $dA$ (resp. $dA_0$ ) v prostorových souřadnicích,                |
|        | $t_0$  | vektor napětí působící na plošku $dA_0$ ,                                       |
|        | $t$    | vektor napětí působící na plošku $dA$ ,   |
|        | $n_0$  | jednotková normála k plošce $dA_0$ ,  |

$\mathbf{n}$  jednotková normála k plošce  $dA$ ,

$d\mathbf{A}_0$  vektor orientované plochy v materiálových souřadnicích v původní konfiguraci,

$d\mathbf{A}$  vektor orientované plochy v prostorových souřadnicích v běžné konfiguraci.

Mezi silou  $df$  a vektory napětí  $\mathbf{t}_0$  a  $\mathbf{t}$  platí následující vztahy

$$df = \mathbf{t} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{t}_0 \cdot d\mathbf{A}_0. \quad (88)$$

Pro vektory orientovaných ploch platí vztahy

$$d\mathbf{A}_0 = \mathbf{n}_0 \cdot dA_0 \quad \text{a} \quad d\mathbf{A} = \mathbf{n} \cdot dA. \quad (89)$$

## 2.2.1 CAUCHYHO NAPĚTÍ

Cauchyho napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  je definováno Cauchyho zákonem. Tenzor Cauchyho napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  je lineárním mapováním vektoru napětí  $\mathbf{t}$  na vektor normály  $\mathbf{n}$ . Tento vztah lze vyjádřit výrazy

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dA = df = \mathbf{t} dA \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}. \quad (90)$$

Tenzor  $\boldsymbol{\sigma}$  je symetrický  $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$ .

Cauchyho napětí je plně definováno na běžné konfiguraci tělesa. Protože vyjadřuje skutečné napětí měřené v daném okamžiku na deformovaném tělese, bývá označováno také jako „true stress“.

## 2.3 FORMULACE GEOMETRICKÉ NELINEARITY V MKP

V mechanice těles bývají obvykle využívány Lagrangeovské sítě. Při diskretizaci jsou možné dvě formulace úlohy, podle toho v jaké konfiguraci tělesa je úloha popisována. Pokud se jedná o úlohu v běžné konfiguraci tělesa, tzn. v prostorových souřadnicích, jedná se o formulaci „updated Lagrangian“. V této formulaci jsou derivace prováděny v prostorových souřadnicích a integrály jsou prováděny na deformovaném tělese. Naproti tomu úloha formulována v původní konfiguraci, tzn. v materiálových souřadnicích, je řešena formulací „total Lagrangian“. V této formulaci jsou derivace prováděny v materiálových souřadnicích a integruje se na původní konfiguraci na nedeformovaném tělese.

V mechanice těles jsou využívány tyto základní rovnice:

- Zákon zachování hmoty
- Zákon zachování hybnosti (lineární i úhlové)
- Zákon zachování energie
- Konstitutivní rovnice, tj. vztahy mezi deformací a napjatostí
- Geometrické rovnice, tj. vztahy mezi přetvořením a posunutím

Na těchto rovnicích stojí celá mechanika těles. Pro účely této práce, bude podrobněji popsána pouze formulace na běžné konfiguraci.

## 2.3.1 FORMULACE NA BĚŽNÉ KONFIGURACI – UPDATED LAGRANGIAN

### 2.3.1.1 ZÁKON ZACHOVÁNÍ HMOTY

Zákon zachování hmoty popisuje, jak se mění hustota tělesa v závislosti na deformaci.

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{\rho_0(\mathbf{X})}{\det(\mathbf{F})} = \frac{\rho_0(\mathbf{X})}{J}, \quad (91)$$

kde  $\rho_0$  je původní hustota (na počáteční konfiguraci) a  $\rho$  je běžná hustota (na deformovaném tělese).

Pokud jsou do požadavku na rovnost hmot  $dm = dm_0$  dosazeny následující vztahy, je získán vztah (91)

$$\begin{aligned} d\Omega &= J d\Omega_0, \\ dm &= \rho d\Omega, \\ dm_0 &= \rho_0 d\Omega_0. \end{aligned} \quad (92)$$

### 2.3.1.2 ZÁKON ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI

a. Zákon zachování lineární hybnosti

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (93)$$

kde  $\dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{u}}$  je vektor zrychlení daného bodu tělesa,  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$  je prostorová divergence Cauchyho napětí,  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{b} - \mathbf{f}_d$  je vektor objemových sil,  $\mathbf{b}$  je vektor gravitačního zrychlení,  $\mathbf{f}_d$  je vektor objemových tlumících sil,



pokud je tlumení pouze viskózní, je vektor tlumicích sil dán vztahem  $\mathbf{f}_d = c \mathbf{v}$ , kde  $c$  je součinitel viskózního útlumu. V tom případě bude mít rovnice (93) tvar

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (94)$$

#### b. Zákon o zachování úhlové hybnosti – točivosti

Při zanedbání setrvačných sil jsou z tohoto zákona generovány momentové podmínky rovnováhy a vyplývá z něj symetrie tenzoru napjatosti  $\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T. \quad (95)$$

Z této rovnice vyplývá věta o vzájemnosti tangenciálních napětí

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (96)$$

### 2.3.1.3 ZÁKON ZACHOVÁNÍ ENERGIE

Zákon zachování energie vyjadřuje skutečnost, že rychlost změny celkové energie tělesa je rovna součtu výkonu vnitřních sil  $\mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma}$ , tj. výkonu zatížení, tepelného toku a výkonu zdroje energie. Při zanedbání zdrojů tepelné energie je význam zákona takový, že rychlost změny hustoty potenciální energie je dána rozdílem výkonu zatížení a rychlosti disipace

$$J \dot{w}^{\text{int}} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} - \nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (97)$$

kde  $\dot{w}^{\text{int}}$  je rychlost změny hustoty potenciální energie vnitřních sil hyperplastického potenciálu na původní konfiguraci, dané vztahem

$$\mathbf{S} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{E}}, \quad (98)$$

$\mathbf{D}$  je tenzor rychlosti deformace podle vztahu

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \frac{D\hat{\mathbf{e}}}{Dt}, \quad (99)$$

kde  $\mathbf{L}$  je gradient rychlosti

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \mathbf{v}, \quad (100)$$

$\mathbf{q}$  je vektor tepelného toku. Nenulový tepelný tok se projeví nenulovým vektorem tlumicích sil  $\mathbf{f}_d$  v pohybové rovnici (93). Pro viskózní tlumení lze rovnici (97) přepsat do tvaru

$$J \dot{w}^{\text{int}} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} - c \mathbf{v}^T \mathbf{v}. \quad (101)$$

#### 2.3.1.4 KONSTITUTIVNÍ ROVNICE

Konstitutivní rovnice vyjadřuje vztah mezi napětím a deformací na běžné konfiguraci tělesa, je vyjádřena vztahem

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}, \boldsymbol{\sigma}, \dots). \quad (102)$$

Pokud by byla uvažována přírůstková forma, vztah by byl linearizován na tvar

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{\text{se}} : \delta \mathbf{e} . \quad (103)$$

kde  $\mathbf{C}^{\text{se}}$  je tečný modul materiálu ze vztahu mezi Cauchyho tenzorem napjatosti a Euler-Almansiho tenzorem deformace, je to tenzor 4. řádu.

V infinitezimální (rychlostní) formě, lze konstitutivní rovnici zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla} = \mathbf{S}_t^{\sigma D} (\mathbf{D}, \boldsymbol{\sigma}, \dots) , \quad (104)$$

kde  $\mathbf{S}_t^{\sigma D}$  je funkce závislá na Cauchyho napětí rychlosti deformace a případně i dalších proměnných,  $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla}$  je některý z objektivních toků napětí.

Pro rozsáhlou skupinu tzv. hypoelastických materiálů je možné zapsat lineární závislost mezi rychlostí napětí a deformace

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla} = \mathbf{C}^{\sigma} : \mathbf{D} , \quad (105)$$

kde  $\mathbf{C}^{\sigma}$  je tenzor modulů pružnosti, který je definován pro daný objektivní tok napětí  $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla}$ .

### 2.3.1.5 GEOMETRICKÉ ROVNICE – MÍRA DEFORMACE

Euler-Almansiho tenzor deformace  $\mathbf{e}$  se ve formulaci updated Lagrangian používá definovaný na deformovaném tělese

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) . \quad (106)$$

### 2.3.1.6 DISKRETIZACE MKP PRO FORMULACI NA BĚŽNÉ KONFIGURACI – UPDATED LAGRANGIAN

Diskretizace na běžné konfiguraci je definována na deformovaném tělese  $\Omega$ . Pokud je Euler-Almansiho tenzor deformace zapsaný ve Voigtově notaci  $\delta \{ \mathbf{e} \}$  a virtuální přírůstek vektoru parametrů deformace  $\delta \mathbf{d}$  v běžné konfiguraci, lze zapsat jejich vzájemný vztah pomocí výrazu

$$\delta \{ \mathbf{e} \} = \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{d}. \quad (107)$$

Je-li tento vztah definován, může být vektor vnitřních uzlových sil počítán podle vzorce

$$\mathbf{f}^{\text{int}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \{ \boldsymbol{\sigma} \} d\Omega. \quad (108)$$

Tento vztah vychází z požadavku energetické ekvivalence vnitřních uzlových sil a napětí tělesa. Virtuální práce, která je konána vnitřními uzlovými silami  $\mathbf{f}^{\text{int}}$  na virtuálních parametrech deformace  $\delta \mathbf{d}$ , se musí rovnat virtuální práci konané napětím  $\{ \boldsymbol{\sigma} \}$  na virtuální deformaci  $\delta \{ \mathbf{e} \}$ .

Oba výrazy popisují virtuální práci vnitřních sil

$$W^{\text{int}} = \int_{\Omega} \delta \{ \mathbf{e} \}^T \{ \boldsymbol{\sigma} \} d\Omega = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}^{\text{int}}. \quad (109)$$

Je-li za  $\{ \mathbf{e} \}$  dosazen výraz (108), potom je získán tvar

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{d}^T \mathbf{B}^T \{ \boldsymbol{\sigma} \} d\Omega = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}^{\text{int}}. \quad (110)$$

kde vektor virtuálních parametrů deformace  $\delta \mathbf{d}$  je konstanta, může být tedy vytknut před integrál. Porovnáním obou stran rovnice je poté získán výraz (108).

### 2.3.1.7 TEČNÁ MATICE TUHOSTI

Běžná tuhost v daném okamžiku je vyjádřena tečnou maticí tuhosti. Tato tuhost respektuje změnu geometrie, tečnou tuhost materiálu i vliv napjatosti v daném okamžiku. Pro deformační variantu MKP lze soustavu nelineárních rovnic zapsat ve tvaru

$$\mathbf{K}(\mathbf{d}) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{f}, \quad (111)$$

kde  $\mathbf{K}$  je sečnová matice tuhosti. Pokud by byla rovnice zapsána v přírůstkové formě, měla by tvar

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{d}^{(i)}) \cdot \delta \mathbf{d}^{(i+1)} = \delta \mathbf{f}^{(i+1)}, \quad (112)$$

kde  $\mathbf{d}^{(i+1)}$  je získáno postupnou sumací

$$\mathbf{d}^{(i+1)} = \mathbf{d}^{(i)} + \delta \mathbf{d}^{(i+1)}, \quad (113)$$

$\mathbf{K}_T$  je tečná matice tuhosti. V běžné konfiguraci  $\mathbf{d}^{(i)}$  může být definována výrazem

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_\sigma, \quad (114)$$

kde  $\mathbf{K}_M$  je tečná materiálová matice tuhosti a  $\mathbf{K}_\sigma$  je tečná geometrická matice tuhosti.

a. Tečná materiálová matice tuhosti

$$\mathbf{K}_M = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \left[ \mathbf{C}^\sigma (\mathbf{e}, t) \right] \mathbf{B} d\Omega, \quad (115)$$

kde  $\mathbf{B}$  je matice prostorových derivací báзовých funkcí definována výrazem (107),  $\left[ \mathbf{C}^\sigma \right]$  je tečná konstitutivní matice pro formulaci na běžné konfiguraci, tj. tečný tenzor pružnosti materiálu definovaný pro danou objektivní míru napětí.

b. Tečná geometrická matice tuhosti  $\mathbf{K}_\sigma$

Geometrická tuhost je dána výhradně napjatostí tělesa, na tuto složku tuhosti nemá žádný vliv použitý materiál.

Pro každou složku vektoru posunutí  $\mathbf{u}$  platí

$$u_j = \sum_{i=1}^n N_i u_{ji}, \quad (116)$$

kde  $u_{ji}$  je hodnota posunutí  $u_j$  v uzlu  $i$  a  $n$  je počet uzlů.

Matice  $\mathbf{N}$  je definována výrazem

$$\mathbf{N} = \left[ N_1 \mathbf{I}, N_2 \mathbf{I}, \dots, N_i \mathbf{I}, \dots, N_n \mathbf{I} \right], \quad (117)$$

kde  $\mathbf{I}$  je jednotková diagonální matice. Výraz pro vektor posunutí potom můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d}, \quad (118)$$

kde  $\mathbf{d}$  je vektor parametrů deformace prvku.

Matice  $\mathbf{g}_i$ , která obsahuje první derivace báзовých funkcí pro každý uzel  $i$ , je definována vztahem

$$\mathbf{g}_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} \mathbf{I} \\ N_{i,y} \mathbf{I} \\ N_{i,z} \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (119)$$

Matice  $\mathbf{G}$  je tvořena submaticemi  $\mathbf{g}_i$  je vyjádřena vztahem

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_i, \dots, \mathbf{g}_n]. \quad (120)$$

Vynásobením každé složky Cauchyho tenzoru napjatosti  $\boldsymbol{\sigma}$  jednotkovou diagonální maticí, získáme matici  $\boldsymbol{\Sigma}$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \mathbf{I} & \sigma_{12} \mathbf{I} & \sigma_{13} \mathbf{I} \\ & \sigma_{22} \mathbf{I} & \sigma_{23} \mathbf{I} \\ sym. & & \sigma_{33} \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (121)$$

kde operátor  $\otimes$  značí tenzorový součin (Kroneckerův maticový součin).

Po vysvětlení jednotlivých částí, můžeme zapsat vzorec pro geometrickou matici prvku

$$\mathbf{K}_\sigma = \int_{\Omega} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{G} d\Omega. \quad (122)$$

### 3 MEZNÍ PLASTICKÁ ÚNOSNOST DESEK

#### 3.1 ZÁKLADNÍ PRINCIPY VÝPOČTU MEZNÍ PLASTICKÉ ÚNOSNOSTI DESEK

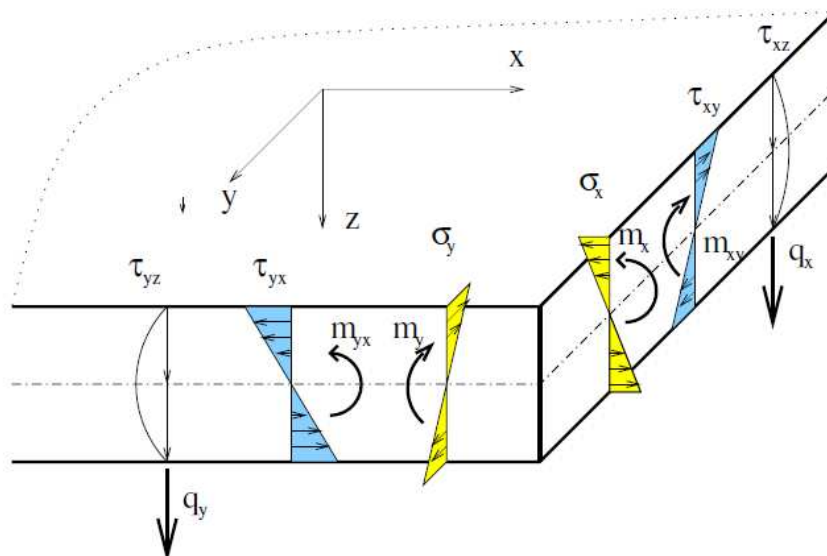
Studiem teorie plasticity se ve své publikaci zabýval kolektiv katedry stavební mechaniky [7]. Jestliže, je při výpočtu desek v pružnoplastickém stavu přihlíženo ke všem silovým a deformačním veličinám, které vznikají při přechodu desky z pružného stavu až po mezní plastickou rovnováhu a její zhroucení, potom se jedná o velmi složitou úlohu. Možným zjednodušením je řešení přímo mezního plastického zatížení. O to více, když je uvažováno s přibližným určením ze základních vět o mezní únosnosti.

Při vyšetřování mezní únosnosti lze uvažovat zjednodušující předpoklady:

- a. tloušťka desky je ve srovnání s jejími ostatními rozměry velmi malá,
- b. průhyb desky je ve srovnání s její tloušťkou velmi malý,
- c. v průběhu deformace zůstává normála ke střednicové rovině přímá,
- d. normálová napětí kolmá ke střednicové rovině jsou zanedbatelná,
- e. smyková napětí kolmá ke střednicové rovině nemají vliv na deformaci desky,
- f. smyková napětí neovlivňují zplastizování desky.

V mezním stavu musí být splněny statické podmínky, tj. podmínky rovnováhy, podmínky plasticity, tj. únosnosti a kinematické podmínky.





Obrázek 3.1.1 Napětí a vnitřní síly na desce podle Brožovského [5].

Podmínky rovnováhy musí být splněny uvnitř i na okraji desky. Pokud uvažujeme výše uvedené předpoklady, lze využít silových veličin, které jsou vztaženy na jednotku délky řezu. Síly jsou vykresleny na obrázku 3.1.1, působí zde posouvající síly  $q_x$ ,  $q_y$ , ohybové momenty  $m_x$ ,  $m_y$  a krouticí momenty  $m_{xy}$ . Pokud je intenzita plošného zatížení označena jako  $p$ , potom lze podmínky rovnováhy prvku zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}, \\ q_y &= \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}, \\ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} &= -p. \end{aligned} \tag{123}$$

Pokud se první dvě rovnice dosadí do poslední, vyloučí se členy posouvajících sil  $q_x, q_y$ . Tím je získána diferenciální podmínka rovnováhy desky

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + p = 0. \quad (124)$$

Další podmínkou je, aby na okrajích desky byly splněny statické okrajové podmínky, tj. podél prostě podepřeného okraje desky musí být ohybový moment roven nule, na volném okraji musí být okrajové reakce rovny nule, pokud zde nedochází k působení příčného zatížení.

Pokud jsou v každém bodě desky splněny diferenciální podmínky rovnováhy a současně i okrajové podmínky, potom je v rovnováze i deska jako tuhý celek.

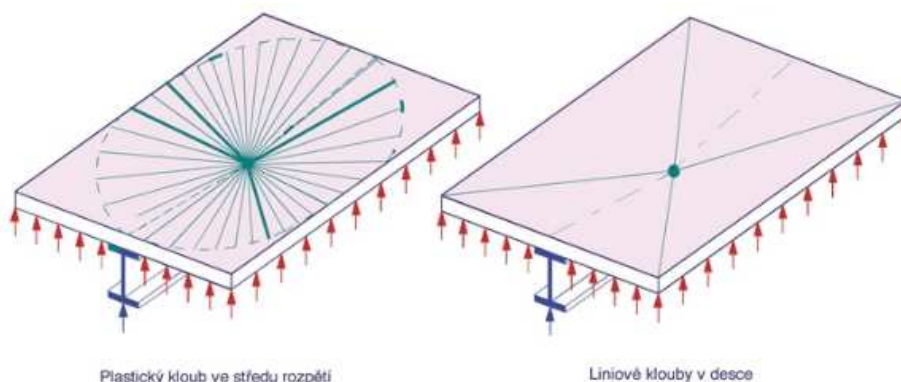
Podmínky plasticity lze formulovat prostřednictvím momentů. Z výše uvedeného předpokladu, že průhyb desky je k ostatním rozměrům desky velmi malý, plyne, že deformace střednicové roviny jsou tak malé, že je možno zanedbat membránové síly. Vliv membránových sil je ale ve skutečnosti velmi výrazný především v konečném stavu porušení, tzn. při velkých deformacích, a zvyšuje reálnou únosnost. Ze zbylých předpokladů je možné vyvodit fakt, že všechny vrstvy rovnoběžné se střednicovou rovinou jsou ve stavu rovinné napjatosti. Podmínku plasticity je tedy možné získat z podmínky plasticity platné pro složky napětí její integrací podél normály. Potom je napětí v prostém tahu nebo tlaku  $\sigma_m$  nahrazeno mezním momentem  $M_m$ . Pro desku z homogenních materiálů je tento moment roven

$$M_m = \frac{1}{4} h^2 \cdot \sigma_m. \quad (125)$$

Kinematické podmínky dosažení mezního plastického stavu desky vyjadřují případ, kdy může nastat proces neomezeného nárůstu deformací, aniž by docházelo ke zvyšování zatížení. Daná funkce přírůstků plastických průhybů musí být kinematicky přípustná, tj. musí splnit podmínky spojitosti:

- a. kinematické okrajové podmínky a podmínky spojitosti,
- b. zákon plastických deformací,
- c. vnější zatížení koná kladnou práci.

Pokud je podél okraje desky předepsán nulový průhyb, potom musí být nulový průhyb dodržen i u průhybové plochy plastických přírůstků. Pokud se jedná o případ pootočení, tj. vetknutý okraj, může nastat nespojitost na okraji i uvnitř desky v tom případě, vytvoří-li se podél určité čáry takzvaný liniový plastický kloub, který představují mezní případ malé oblasti s velkou změnou křivosti jak je zobrazeno na obrázku 3.1.2



*Obrázek 3.1.2 Zobrazení vzniku plastických kloubů při zahřívání ocelobetonové desky podle Wald [6].*

Z hlediska zákona plastických deformací se jedná o vzájemnou souvislost mezi vnitřními silami ve zplastizovaném místě desky a mezi plastickými deformacemi. Toto je v teorii plastického tečení formulováno pomocí tzv. asociovaného zákona plastického tečení.

Pro řešení pomocí kinematické věty je nutný odhad dostatečně pravděpodobného kinematicky přípustného plastického mechanismu desky v mezním stavu, pro který je určeno příslušné mezní zatížení, za předpokladu, že je deska uvažována jako tuhoplastická, tj. zanedbávají se pružné deformace. Zatížení, které je tímto způsobem získáno, je buďto větší nebo rovno meznímu zatížení.

Názorně je uvedeno řešení pro rovnoměrně zatíženou ortotropní obdélníkovou desku. Jde o železobetonovou křížem vyztuženou desku, kdy je výztuž uložena ve dvou vzájemně kolmých směrech a při horním a dolním povrchu. Únosnost je potom charakterizována čtyřmi mezními momenty s různými hodnotami. Mezní momenty při kladném namáhání jsou označeny jako  $M_{mx}$ ,  $M_{my}$  a mezní momenty při záporném namáhání, které způsobuje tah na horních vláknech, jsou označeny jako  $M'_{mx}$ ,  $M'_{my}$ . Jde o tzv. vrstevnatou plastickou ortotropii desky. Únosnost v kladném a záporném ohybu je dána výrazy

$$\begin{aligned} M_{m\varphi} &= M_{mx} \cos^2 \varphi + M_{my} \sin^2 \varphi, \\ M'_{m\varphi} &= M'_{mx} \cos^2 \varphi + M'_{my} \sin^2 \varphi, \end{aligned} \quad (126)$$

kde  $\varphi$  je úhel, který v šikmém řezu svírá normála s osou x.

Pokud uvažujeme, že skutečně působící moment v každém řezu  $\varphi$  musí ležet v daném rozmezí, potom podmínku plasticity můžeme formulovat

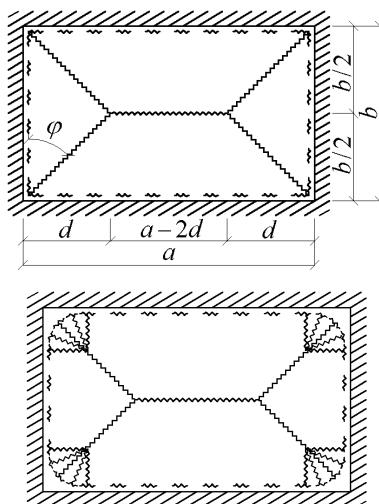
$$-M'_{m\varphi} \leq M_{\varphi} \leq M_{m\varphi}. \quad (127)$$

Je-li moment v šikmém řezu vyjádřen pomocí složek  $M_x$ ,  $M_y$  a  $M_{xy}$ , a podmínka je uplatněna v řezu, kde je rozdíl mezi momentem  $M_\varphi$  a mezním momentem  $M_{m\varphi}$  (resp.  $M'_{m\varphi}$ ) nejmenší, jsou získány rovnice

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{M_x}{M_{mx}}\right) \left(1 - \frac{M_y}{M_{my}}\right) - \frac{M_{xy}^2}{M_{mx} M_{my}} &\geq 0, \\ \left(1 + \frac{M_x}{M'_{mx}}\right) \left(1 + \frac{M_y}{M'_{my}}\right) - \frac{M_{xy}^2}{M'_{mx} M'_{my}} &\geq 0, \end{aligned} \quad (128)$$

ty nahrazují podmínky plasticity pro izotropní desku, která má shodnou únosnost v kladném i záporném ohybu.

Dále jsou uvedeny výsledné vzorce pro plně rovnoměrně zatížené obdélníkové desky při různých okrajových podmínkách. Řešení bylo získáno pomocí kinematické metody s předpokládaným jednoduchým mechanismem ve tvaru obrácené střechy. V oblasti rohů u desek s vetknutím byly zanedbány vějířovité plastické klouby. V případě, že by byly uvažovány, došlo by k poklesu mezního zatížení. Jednoduchý mechanismus a vějířovité plastické klouby jsou zobrazeny na obrázku 3.1.3.



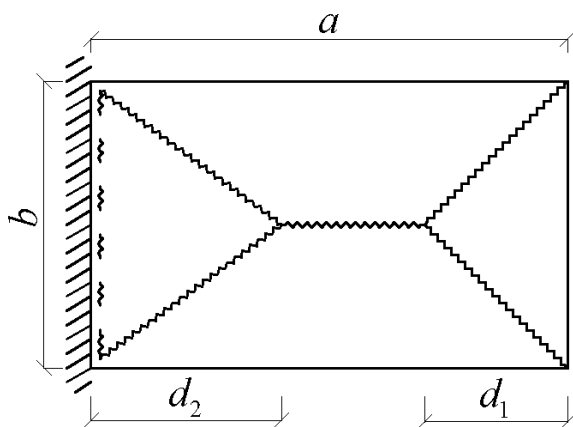
Obrázek 3.1.3 Mezní plastický mechanismus vetknuté desky podle skript kolektivu katedry stavební mechaniky [7].

Mezní stav rovnoměrně zatížené obdélníkové vrstevnatě ortotropní desky řešen kinematickou metodou. Vysvětlení označení uvedených ve vztazích:

$$\frac{M_{mx}}{M_{my}} = \phi, \quad \frac{M'_{mx}}{M_{mx}} = \nu, \quad \frac{M'_{my}}{M_{my}} = \mu, \quad \frac{b}{a} = \xi.$$

Řešení pro vybrané typy nesymetricky uložených desek, obrázky jsou zpracovány podle skript kolektivu katedry stavební mechaniky [7]:

1. krátká strana vetknutá, zbylé strany prostě podepřené



$$\xi < \frac{2}{(1 + \sqrt{1 + \nu})\sqrt{\phi}}$$

$$M_{mx} = \frac{p b^2}{24} \gamma^2$$

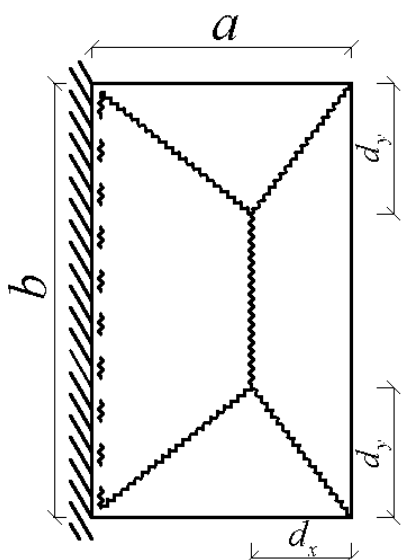
$$\gamma = \phi z \left( \sqrt{\frac{3}{\phi z^2} + \xi^2} - \xi \right)$$

$$z = \frac{1 + \sqrt{1 + \nu}}{2}$$

$$d_1 = \frac{b}{2} \gamma$$

$$d_2 = d_1 \sqrt{1 + \nu}$$

2. delší strana vetknutá, zbylé strany prostě podepřené



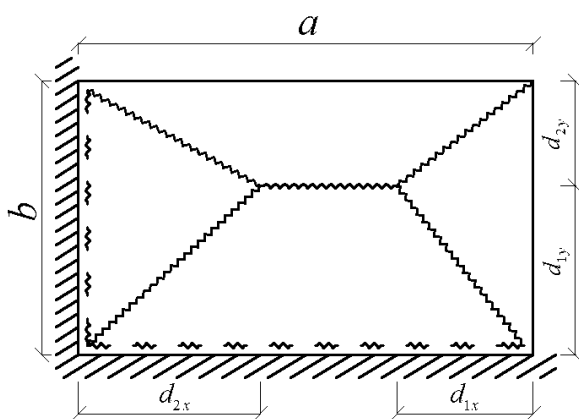
$$\xi > \frac{2}{(1 + \sqrt{1 + \nu}) \sqrt{\phi}}$$

$$M_{mx} = \frac{p a^2}{24} \gamma^2 \phi$$

$$\gamma = \frac{1}{\phi z^2} \left( \sqrt{3 \phi z^2 + \frac{1}{\xi^2}} - \frac{1}{\xi} \right)$$

$$d_x = \frac{a}{2} z \quad z = \frac{1 + \sqrt{1 + \nu}}{2}$$

3. jedna delší a jedna kratší strana vetknutá, zbylé strany prostě podepřené



$$\xi < \frac{1 + \sqrt{1 + \mu}}{1 + \sqrt{1 + \nu}} \frac{1}{\sqrt{\phi}}$$

$$M_{mx} = \frac{p b^2}{24} \gamma^2$$

$$\gamma = \phi \frac{2s}{w^2} \left( \sqrt{\frac{3w^2}{\phi s^2} + \xi^2} - \xi \right)$$

$$s = 1 + \sqrt{1 + \nu}$$

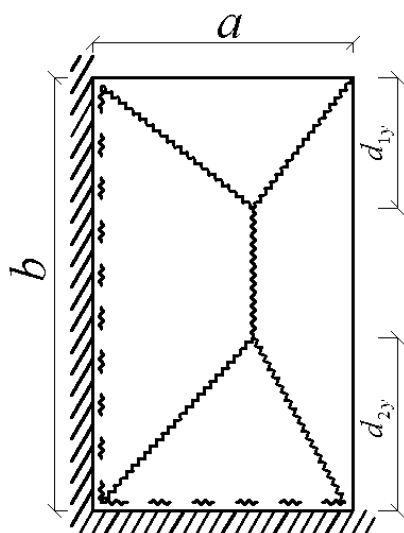
$$d_{1x} = \frac{b}{2} \gamma$$

$$d_{2x} = d_{1x} \sqrt{1 + \nu}$$

$$w = 1 + \sqrt{1 + \mu}$$

$$d_{2y} = \frac{b}{1 + \sqrt{1 + \mu}}$$

4. jedna delší a jedna kratší strana vetknutá, zbylé strany prostě podepřené



$$s = 1 + \sqrt{1 + \nu}$$

$$w = 1 + \sqrt{1 + \mu}$$

$$\xi > \frac{1 + \sqrt{1 + \mu}}{1 + \sqrt{1 + \nu}} \frac{1}{\sqrt{\phi}}$$

$$M_{mx} = \frac{p b^2}{24} \frac{\gamma^2}{\phi}$$

$$\gamma = \phi \frac{2s}{w^2} \left( \sqrt{\frac{3w^2}{\phi s^2} + \xi^2} - \xi \right)$$

$$d_{1y} = \frac{a}{2} \gamma$$

$$d_{2y} = d_{1y} \sqrt{1 + \nu}$$

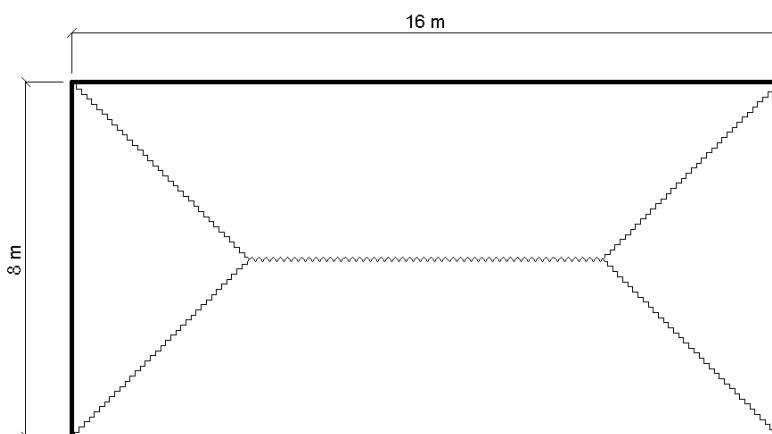


## 4 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

### 4.1 RUČNÍ ŘEŠENÍ MEZNÍ PLASTICKÉ ÚNOSNOSTI DESEK KINEMATICKOU METODOU S VYUŽITÍM VON MISESOVA KRITÉRIA PLASTICITY

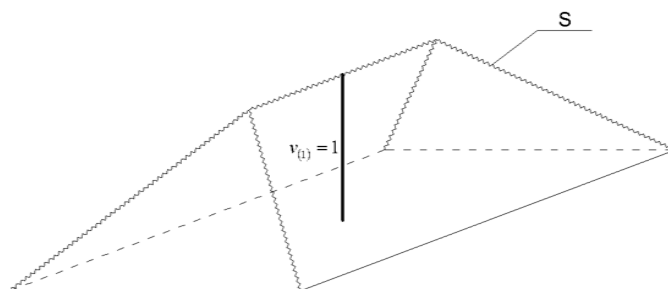
#### 4.1.1 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 16 x 8 m

Obdélníková deska je symetricky prostě podepřená a je uvažováno plné plošné rovnoměrné zatížení. Na obrázku 4.1.1.1 jsou vykresleny rozměry desky a cikcak čára zobrazuje předpokládaný kinematický mechanismus ve tvaru obrácené střechy.



Obrázek 4.1.1.1 Geometrie desky a vykreslení kinematického mechanismu porušení.

Pro názornost je na obrázku 4.1.1.2 zobrazen trojrozměrný tvar předpokládaného kinematického mechanismu otočený o 180°. Označení  $s$  představuje délku plastického kloubu, která je řešena níž.



Obrázek 4.1.1.2 Zobrazení tvaru vzniklého mechanismu porušení a jednotková výška.

## MOMENT PRO PLNĚ ZPLASTIZOVANÝ PRŮŘEZ

$$M_p = \sigma_m \frac{h^2}{4}$$

pro tloušťku desky 150 mm:

$$M_p = 0,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,150^2}{4} = 562,5 \text{ Nm}^2 = 0,5625 \text{ kNm}^2$$

pro tloušťku desky 1 000 mm:

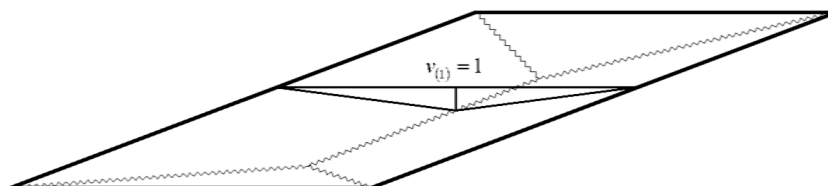
$$M_p = 0,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{1,000^2}{4} = 25000 \text{ Nm}^2 = 25 \text{ kNm}^2$$

## OBJEM TĚLESA VZNIKLÉHO MECHANISMEM PORUŠENÍ

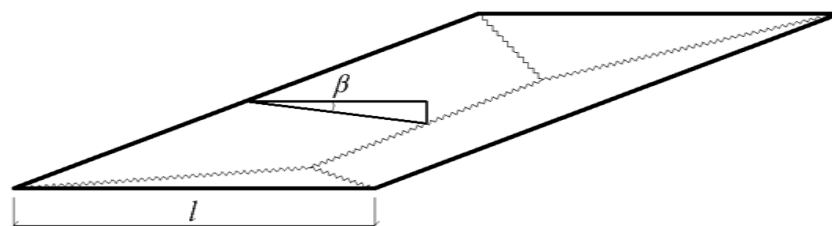
$$\left. \begin{aligned} V_{\text{jeblan}} &= \frac{1}{3} S_p \cdot v_{(1)} = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 1 = 21,33\bar{3} \text{ m}^3 \\ V_{\text{kvádr}} &= a \cdot b \cdot v_{(1)} = 4 \cdot 8 \cdot 1 = 32 \text{ m}^3 \end{aligned} \right\} V_{\text{celkem}} = 21,33\bar{3} + 32 = 53,33\bar{3} \text{ m}^3$$

## DÉLKA PLASTICKÝCH KLOUBŮ

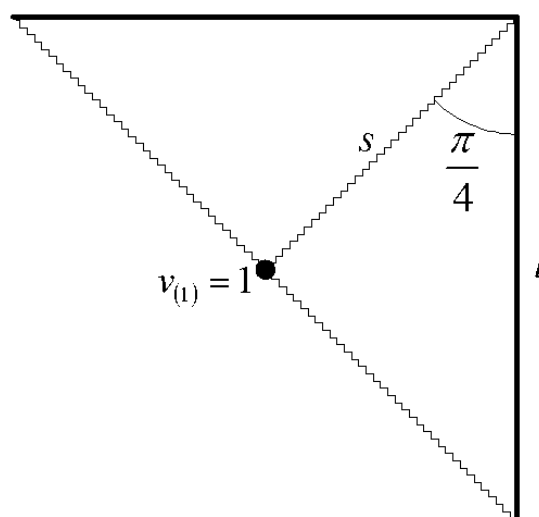
Ve výpočtu je uvažováno s jednotkovou výškou vzniklého mechanismu, viz obrázek 4.1.1.3, a jsou řešeny úhly, které jsou svírány částmi desky rozdělené plastickými klouby, obrázek 4.1.1.4.

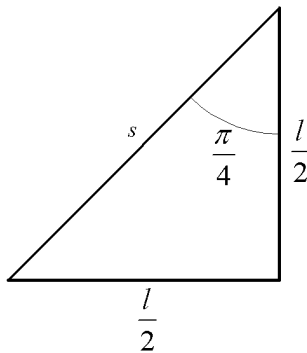


Obrázek 4.1.1.3 Jednotková výška dráhy mechanismu.



Obrázek 4.1.1.4 Určení úhlu dráhy mechanismu porušení.



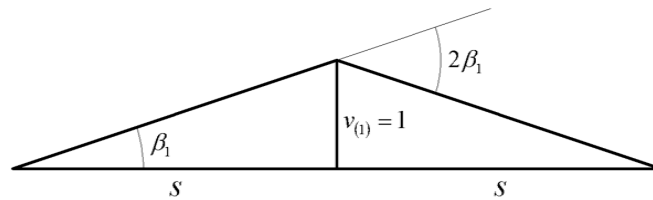


$$s_1^1 = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

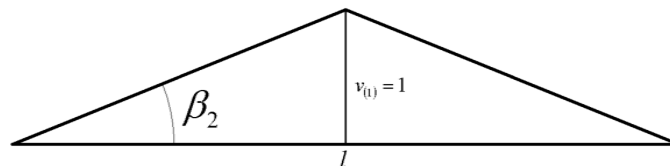
$$s_1^1 = \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2}$$

$$s_1^1 = 5,657 \text{ m}$$

$$s_1 = 4 \cdot s_1^1 = 4 \cdot 5,657 = 22,628 \text{ m}$$



$$2 \cdot \beta_1 \cong 2 \cdot \operatorname{tg} \beta_1 = 2 \cdot \frac{v_{(1)}}{s} = 2 \cdot \frac{1}{5,657} = 0,35354428^\circ$$



$$\beta_2 \cong \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{v_{(1)}}{\frac{l}{2}} = \frac{1}{\frac{8}{2}} = \frac{1}{4} = 0,25^\circ$$

$$s_2 = 8 \text{ m}$$

## MEZNÍ ZATÍŽENÍ

$$p = \frac{\sum M_p \cdot s \cdot \beta_i}{V_{\text{celkem}}}$$

pro tloušťku desky 150 mm:

$$p = \frac{0,5625 \cdot 10^3 \cdot 22,628 \cdot 0,35354428 + 0,5625 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 0,25}{53,333} = 105,526 \text{ N} / \text{m}^2$$

$$p = 0,106 \text{ kN} / \text{m}^2$$

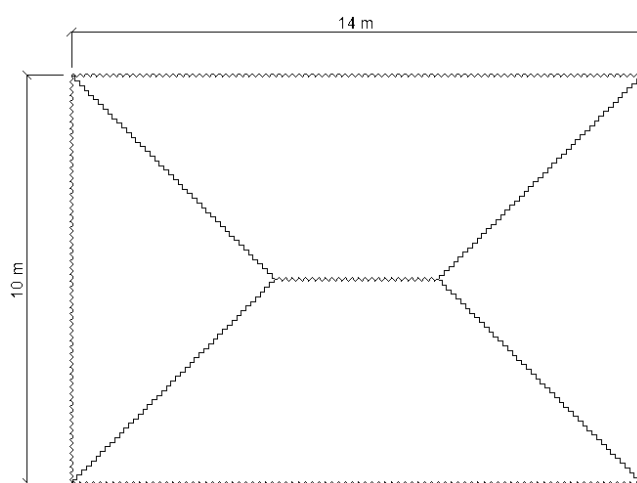
pro tloušťku desky 1 000 mm:

$$p = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 22,628 \cdot 0,35354428 + 25 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 0,25}{53,333} = 4\,687,529 \text{ N} / \text{m}^2$$

$$p = 4,688 \text{ kN} / \text{m}^2$$

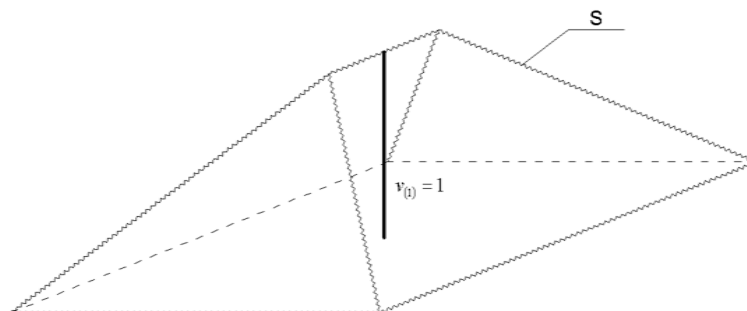
#### 4.1.2 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 14 x 10 m

Obdélníková deska je opět symetricky uložená, ale na rozdíl od předešlého příkladu jde o vetknutí a je uvažováno s plným plošným rovnoměrným zatížením. Na obrázku 4.1.2.1 je vykreslena geometrie s rozměry a cikcak čára představuje předpokládaný kinematický mechanismus porušení. Z důvodu vetknutí je porušení předpokládáno i na okrajích desky.



Obrázek 4.1.2.1 Geometrie desky a vykreslení kinematického mechanismu porušení.

Pro lepší představu je na obrázku 4.1.2.2 vykreslen trojrozměrný mechanismus porušení v podobě obrácené střechy otočené o 180°. Označení  $s$  představuje délku plastických kloubů.



Obrázek 4.1.2.2 Zobrazení tvaru vzniklého mechanismu porušení a jednotková výška.

## MOMENT PRO PLNĚ ZPLASTIZOVANÝ PRŮŘEZ

$$M_p = \sigma_m \frac{h^2}{4}$$

pro tloušťku desky 150 mm:

$$M_p = 0,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,150^2}{4} = 562,5 \text{ Nm}^2 = 0,5625 \text{ kNm}^2$$

pro tloušťku desky 1 000 mm:

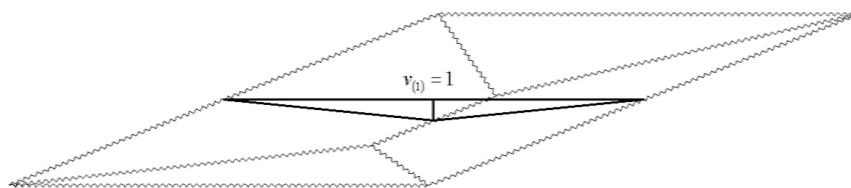
$$M_p = 0,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{1,000^2}{4} = 25000 \text{ Nm}^2 = 25 \text{ kNm}^2$$

## OBJEM TĚLESA VZNIKLÉHO MECHANISMEM PORUŠENÍ

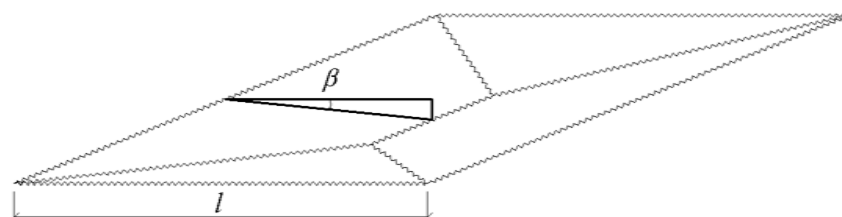
$$\left. \begin{aligned} V_{jehlan} &= \frac{1}{3} S_p \cdot v_{(1)} = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 33,33\bar{3} \text{ m}^3 \\ V_{kvádr} &= a \cdot b \cdot v_{(1)} = 4 \cdot 5 \cdot 1 = 20 \text{ m}^3 \end{aligned} \right\} V_{celkem} = 33,33\bar{3} + 20 = 53,33\bar{3} \text{ m}^3$$

## DÉLKA PLASTICKÝCH KLOUBŮ

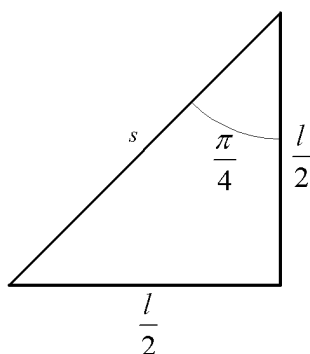
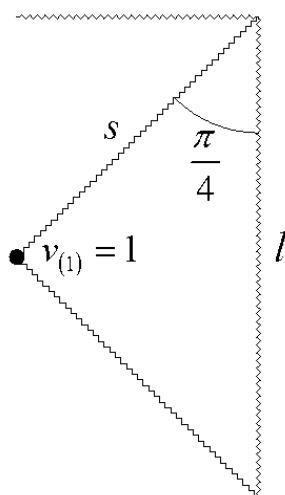
Ve výpočtech je uvažováno s jednotkovou výškou, jak je znázorněno na obrázku 4.1.2.3. Na obrázku 4.1.2.4 je naznačen úhel svíraný jednotlivými částmi desky rozdělenými vzniklým kinematickým mechanismem.



Obrázek 4.1.2.3 Jednotková výška dráhy mechanismu.



Obrázek 4.1.2.4 Určení úhlu dráhy mechanismu porušení.



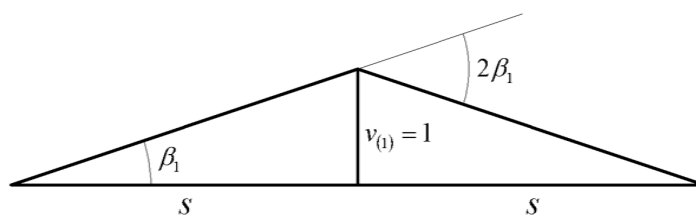
$$s_1^1 = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$s_1^1 = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2}$$

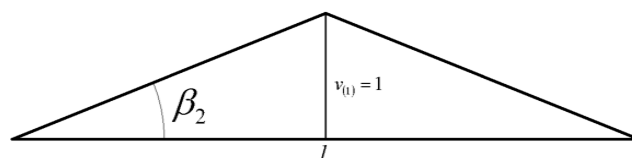
$$s_1^1 = 7,071 \text{ m}$$

$$s_1 = 4 \cdot s_1^1 = 4 \cdot 7,071 = 28,284 \text{ m}$$



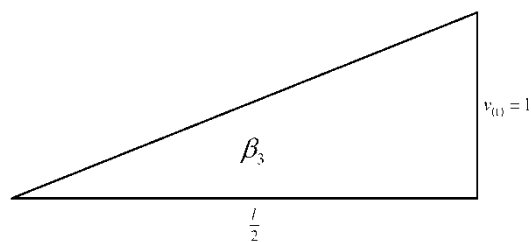


$$2 \cdot \beta_1 \cong 2 \cdot \operatorname{tg} \beta_1 = 2 \cdot \frac{v_{(I)}}{s} = 2 \cdot \frac{1}{7,071} = 0,28284543^\circ$$



$$\beta_2 \cong \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{v_{(I)}}{\frac{l}{2}} = \frac{1}{\frac{10}{2}} = \frac{1}{5} = 0,2^\circ$$

$$s_2 = 4 \text{ m}$$



$$\beta_3 \cong \operatorname{tg} \beta_3 = \frac{v_{(I)}}{\frac{l}{2}} = \frac{1}{5} = 0,2^\circ$$

$$s_3 = 2 \cdot l_1 + 2 \cdot l_2 = 2 \cdot 14 + 2 \cdot 10 = 48 \text{ m}$$

## MEZNÍ ZATÍŽENÍ

$$p = \frac{\sum M_p \cdot s \cdot \beta_i}{V_{\text{celkem}}}$$

pro tloušťku desky 150 mm:

$$p = \frac{0,5625 \cdot 10^3 \cdot 28,284 \cdot 0,28284543 + 0,5625 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 0,2 + 0,5625 \cdot 10^3 \cdot 48 \cdot 0,2}{53,333} = 194064 \text{ N/m}^2$$

$$p = 0,194 \text{ kN/m}^2$$

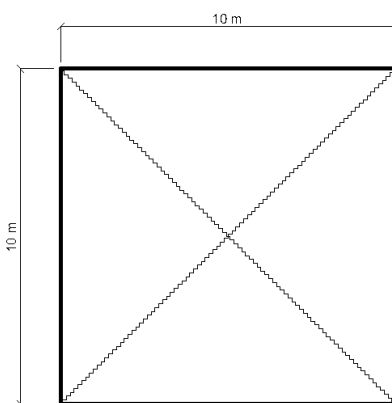
pro tloušťku desky 1 000 mm:

$$p = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 28,284 \cdot 0,28284543 + 25 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 0,2 + 25 \cdot 10^3 \cdot 48 \cdot 0,2}{53,333} = 8\,625,054 \text{ N/m}^2$$

$$p = 8,625 \text{ kN/m}^2$$

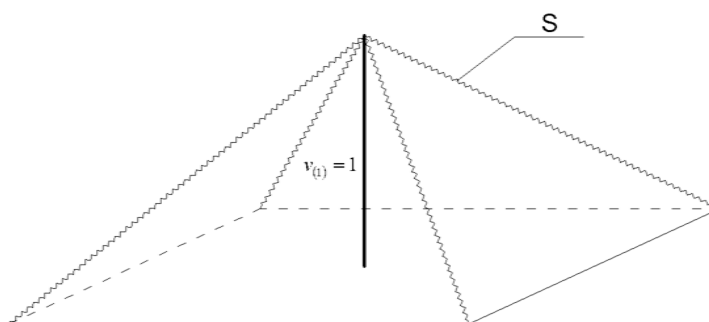
### 4.1.3 ČTVERCOVÁ DESKA 10 x 10 m

Mezní zatížení pro čtvercovou desku je počítáno pro symetrické prosté podepření. Obrázek 4.1.3.1 představuje geometrii a rozměry desky. Cikcak čára představuje předpokládaný kinematický mechanismus. Pro výpočet bylo uvažováno plné plošné rovnoměrné zatížení.



Obrázek 4.1.3.1 Geometrie desky a vykreslení kinematického mechanismu porušení.

Mechanismus porušení, který byl pro výpočet předpokládán, je pro lepší představu vykreslen prostorově na obrázku 4.1.3.2, byl otočen o 180°. Označení  $s$  představuje délku plastických kloubů počítaných níž.



Obrázek 4.1.3.2 Zobrazení tvaru vzniklého mechanismu porušení a jednotková výška.

## MOMENT PRO PLNĚ ZPLASTIZOVANÝ PRŮŘEZ

$$M_p = \sigma_m \frac{h^2}{4}$$

pro tloušťku desky 150 mm:

$$M_p = 0,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,150^2}{4} = 562,5 \text{ Nm}^2 = 0,5625 \text{ kNm}^2$$

pro tloušťku desky 1 000 mm:

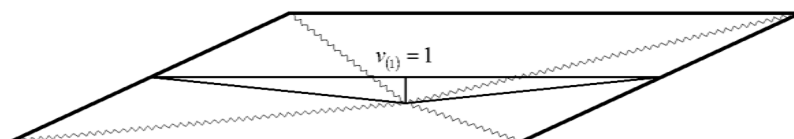
$$M_p = 0,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{1,000^2}{4} = 25000 \text{ Nm}^2 = 25 \text{ kNm}^2$$

## OBJEM TĚLESA VZNIKLÉHO MECHANISMEM PORUŠENÍ

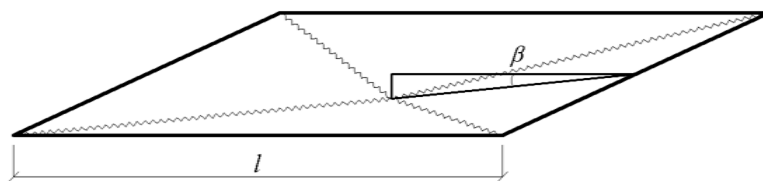
$$V_{celkem} = \frac{1}{3} S_p \cdot v_{(1)} = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 33,33 \overline{3} \text{ m}^3$$

## DÉLKA PLASTICKÝCH KLOUBŮ

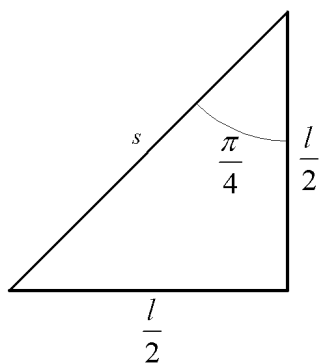
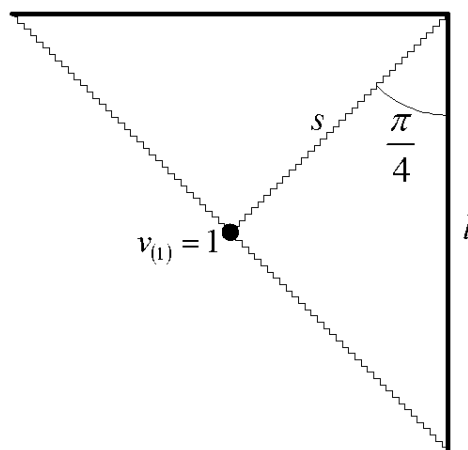
Mezní zatížení bylo postupně řešeno s uvažováním jednotkové výšky, viz obrázky 4.1.3.3. Počítán byl úhel vytvořený předpokládaným mechanismem porušení, jak je naznačeno na obrázku 4.1.3.4.



Obrázek 4.1.3.3 Jednotková výška dráhy mechanismu.



Obrázek 4.1.3.4 Určení úhlu dráhy mechanismu porušení.

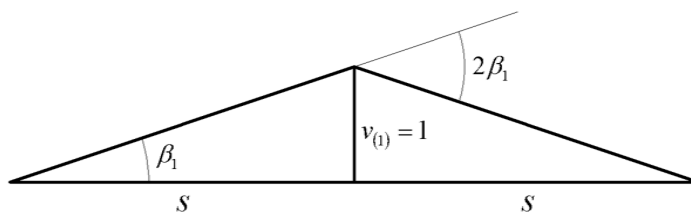


$$s_1^1 = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$s_1^1 = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2}$$

$$s_1^1 = 7,071 \text{ m}$$

$$s_1 = 4 \cdot s_1^1 = 4 \cdot 7,071 = 28,284 \text{ m}$$



$$2 \cdot \beta_1 \cong 2 \cdot \operatorname{tg} \beta_1 = 2 \cdot \frac{v_{(1)}}{s} = 2 \cdot \frac{1}{7,071} = 0,28284543^\circ$$

## MEZNÍ ZATÍŽENÍ

$$p = \frac{\sum M_p \cdot s \cdot \beta_i}{V_{\text{celkem}}}$$

pro tloušťku desky 150 mm:

$$p = \frac{0,5625 \cdot 10^3 \cdot 28,284 \cdot 0,28284543}{33,33\bar{3}} = 135,001 \text{ N} / \text{m}^2$$

$$p = 0,135 \text{ kN} / \text{m}^2$$

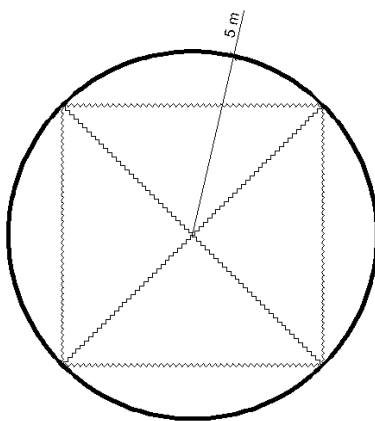
pro tloušťku desky 1 000 mm:

$$p = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 28,284 \cdot 0,28284543}{33,33\bar{3}} = 6\,000,060 \text{ N} / \text{m}^2$$

$$p = 6,000 \text{ kN} / \text{m}^2$$

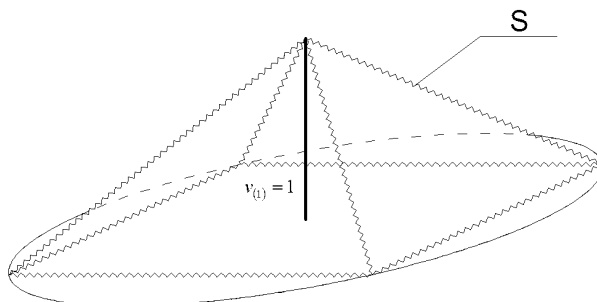
#### 4.1.4 KRUHOVÁ DESKA poloměr 5 m – 1. varianta mechanismu

Kruhová deska byla řešena dvěma variantami návrhu kinematického mechanismu. První deska, která je symetricky prostě podepřena, byla řešena variantou, kdy byl předpokládán tvar kinematického mechanismu porušení jako u symetricky vetknuté čtvercové desky. Geometrie desky a tvar předpokládaného mechanismu porušení, které je vykresleno cikcak čarou, jsou zobrazeny na obrázku 4.1.4.1. Pro výpočet mezního zatížení bylo uvažováno plné plošné rovnoměrné zatížení.



Obrázek 4.1.4.1 Geometrie desky a vykreslení kinematického mechanismu porušení.

Opět byl mechanismus vykreslen v prostorovém zobrazení a otočen o 180°. Označení  $s$  představuje délku plastických kloubů.



Obrázek 4.1.4.2 Zobrazení tvaru vzniklého mechanismu porušení a jednotková výška.

## MOMENT PRO PLNĚ ZPLASTIZOVANÝ PRŮŘEZ

$$M_p = \sigma_m \frac{h^2}{4}$$

pro tloušťku desky 150 mm:

$$M_p = 0,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,150^2}{4} = 562,5 \text{ Nm}^2 = 0,5625 \text{ kNm}^2$$

pro tloušťku desky 1 000 mm:

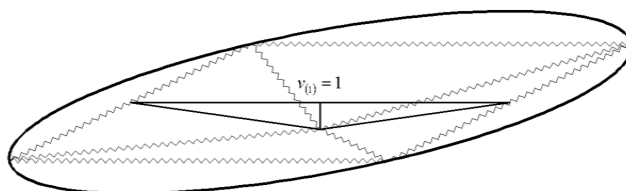
$$M_p = 0,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{1,000^2}{4} = 25000 \text{ Nm}^2 = 25 \text{ kNm}^2$$

## OBJEM TĚLESA VZNIKLÉHO MECHANISMEM PORUŠENÍ

$$V_{celkem} = \frac{1}{3} S_p \cdot v_{(1)} = \frac{1}{3} \cdot 7,071 \cdot 7,071 \cdot 1 = 16,666 \text{ m}^3$$

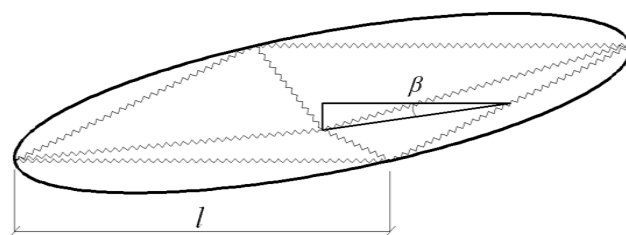
## DÉLKA PLASTICKÝCH KLOUBŮ

Výpočet mezního zatížení byl prováděn s využitím jednotkové výšky zobrazené na obrázku 4.1.4.3. Obrázek 4.1.4.4 naznačuje jeden z řešených úhlů vytvořený tvarem předpokládaného porušení.

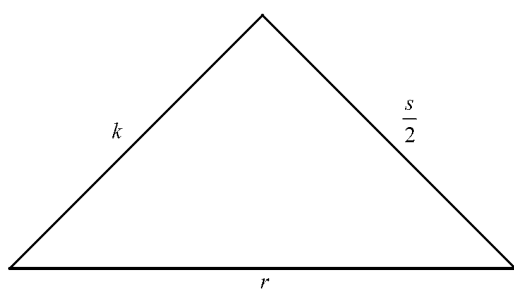
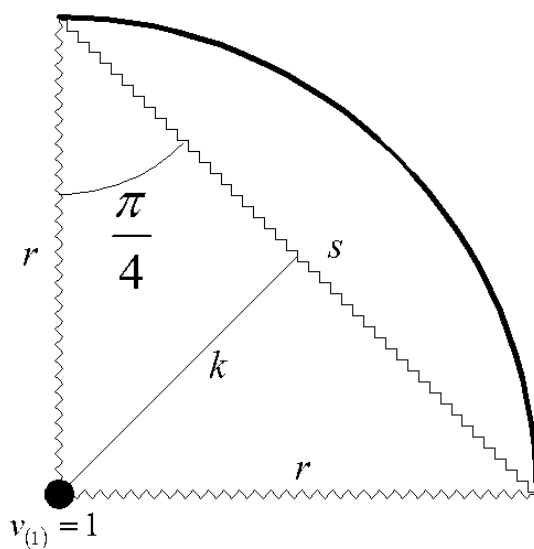


Obrázek 4.1.4.3 Jednotková výška dráhy mechanismu.





Obrázek 4.1.4.4 Určení úhlu dráhy mechanismu porušení.



$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\frac{s}{2}}{r}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\frac{s}{2}}{5}$$

$$\frac{s}{2} = 5 \cdot \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{s}{2} = 3,5355 \text{ m}$$

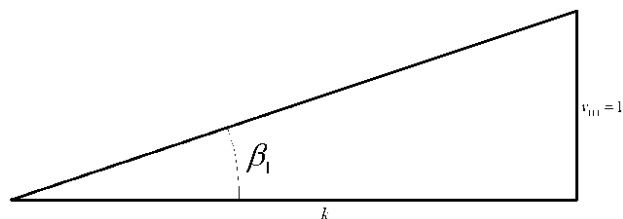
$$s = 2 \cdot \frac{s}{2} = 2 \cdot 3,5355 = 7,071 \text{ m}$$

$$s_1 = 4 \cdot s = 4 \cdot 7,071 = 28,284 \text{ m}$$

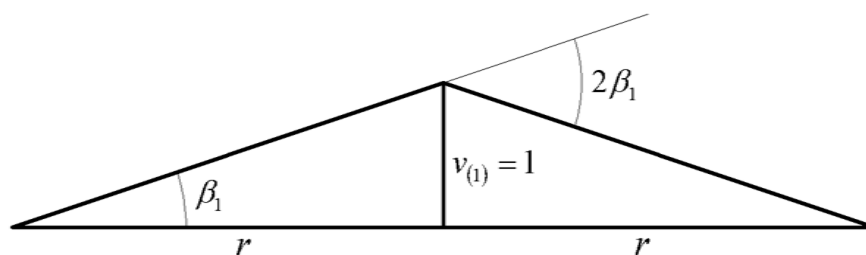
$$k = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

$$k = \sqrt{5^2 - 3,5355^2}$$

$$k = 3,5356 \text{ m}$$



$$\beta_1 \cong \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{v_{(1)}}{k} = \frac{1}{3,5356} = 0,28283743^\circ$$



$$2 \cdot \beta_2 \cong 2 \cdot \operatorname{tg} \beta_2 = 2 \cdot \frac{v_{(1)}}{r} = 2 \cdot \frac{1}{5} = 0,40^\circ$$

$$s_2 = 4 \cdot r = 4 \cdot 5 = 20 \text{ m}$$

## MEZNÍ ZATÍŽENÍ

$$p = \frac{\sum M_p \cdot s \cdot \beta_i}{V_{\text{celkem}}}$$

pro tloušťku desky 150 mm:

$$p = \frac{0,5625 \cdot 10^3 \cdot 28,284 \cdot 0,28283743 + 0,5625 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 0,40}{16,666} = 540,014 \text{ N} / \text{m}^2$$

$$p = 0,540 \text{ kN} / \text{m}^2$$

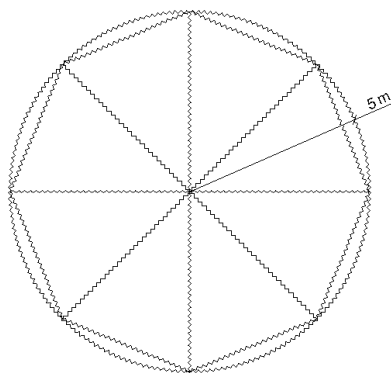
pro tloušťku desky 1 000 mm:

$$p = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 28,284 \cdot 0,28283743 + 25 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 0,40}{16,666} = 24\,000,621 \text{ N} / \text{m}^2$$

$$p = 24,001 \text{ kN} / \text{m}^2$$

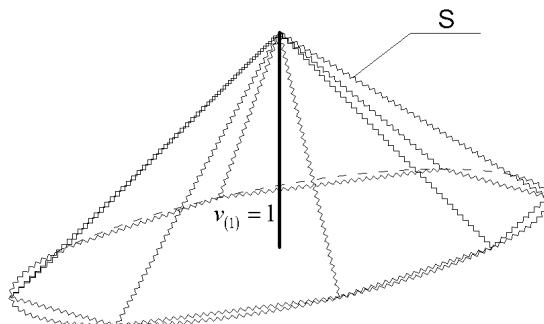
#### 4.1.5 KRUHOVÁ DESKA poloměr 5 m – 2. varianta mechanismu

Druhá varianta výpočtu kruhové desky předpokládala složitější kinematický mechanismus porušení, než jak tomu bylo u předešlého příkladu. Pro toto zadání, bylo uvažováno vetknutí a plné plošné rovnoměrné zatížení. Geometrie desky a tvar předpokládaného mechanismu porušení, zobrazeného cikcak čarou, je vykreslen na obrázku 4.1.5.1. Z důvodu vetknutí je předpokládáno porušení i po obvodu desky.



Obrázek 4.1.5.1 Geometrie desky a vykreslení kinematického mechanismu porušení.

Tvar složitějšího předpokládaného kinematického mechanismu je lépe zřetelný v trojrozměrném vyobrazení, viz obr. 4.1.5.2. Jde o tvar osmibokého jehlanu. Označení  $s$  platí pro délku plastických kloubů.



Obrázek 4.1.5.2 Zobrazení tvaru vzniklého mechanismu porušení a jednotková výška.

### MOMENT PRO PLNĚ ZPLASTIZOVANÝ PRŮŘEZ

$$M_p = \sigma_m \frac{h^2}{4}$$

pro tloušťku desky 150 mm:

$$M_p = 0,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,150^2}{4} = 562,5 \text{ Nm}^2 = 0,5625 \text{ kNm}^2$$

pro tloušťku desky 1 000 mm:

$$M_p = 0,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{1,000^2}{4} = 25000 \text{ Nm}^2 = 25 \text{ kNm}^2$$

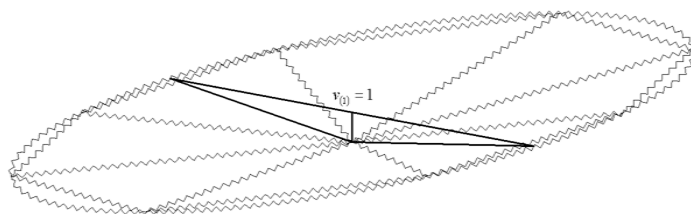
### OBJEM TĚLESA VZNIKLÉHO MECHANISMEM PORUŠENÍ

$$S_p = 8 \cdot \frac{l \cdot x}{2} = 8 \cdot \frac{3,827 \cdot 4,619}{2} = 70,7077 \text{ m}^2$$

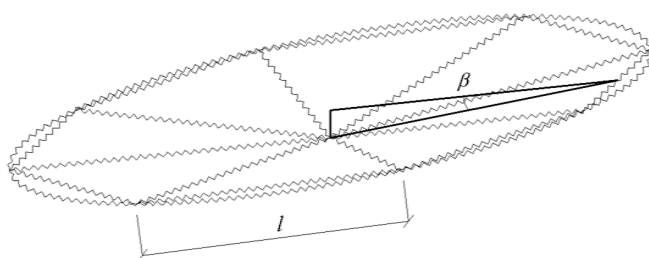
$$V_{celkem} = \frac{1}{3} S_p \cdot v_{(1)} = \frac{1}{3} \cdot 70,7077 \cdot 1 = 23,569 \text{ m}^3$$

### DÉLKA PLASTICKÝCH KLOUBŮ

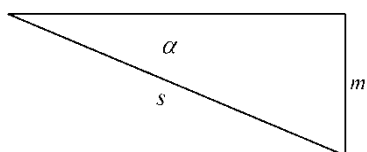
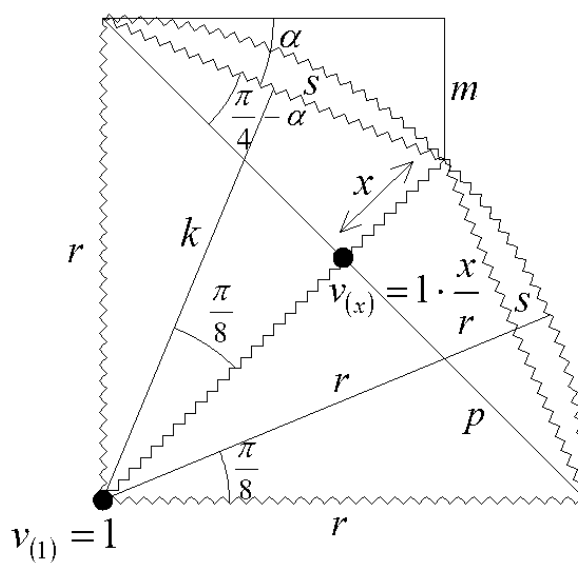
Výpočet délky plastických kloubů a úhlů vzniklých při vytvoření mechanismu byl prováděn s uvažováním jednotkové výšky, jak je vykresleno na obrázku 4.1.5.3. Jeden z řešených úhlů je naznačen na obrázku 4.1.5.4.



Obrázek 4.1.5.3 Jednotková výška dráhy mechanismu.



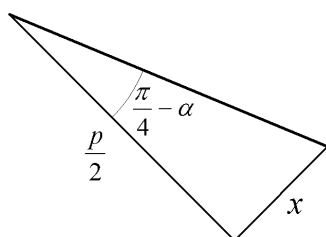
Obrázek 4.1.5.4 Určení úhlu dráhy mechanismu porušení.



$$\sin \alpha = \frac{m}{s}$$

$$\sin \alpha = \frac{1,464}{3,827}$$

$$\alpha = 22,49142^\circ$$



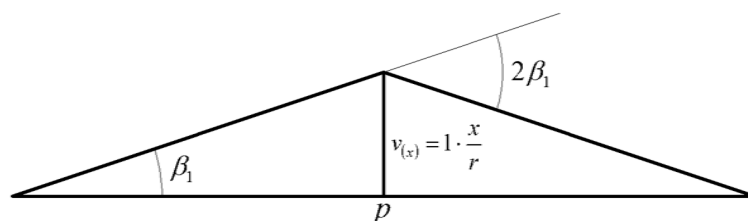
$$\gamma = \frac{\pi}{4} - \alpha = \frac{\pi}{4} - 22,49142 = 22,50858^\circ$$

$$\sin \gamma = \frac{x}{s}$$

$$\sin 22,50858 = \frac{x}{3,827}$$

$$x = 1,465 \text{ m}$$

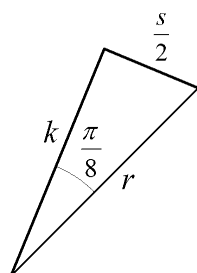
$$\frac{p}{2} = \sqrt{s^2 - x^2} = \sqrt{3,827^2 - 1,465^2} = 3,535 \text{ m}$$



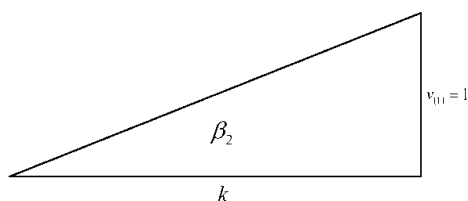
$$v_{(x)} = 1 \cdot \frac{x}{r} = 1 \cdot \frac{1,465}{5} = 0,293 \text{ m}$$

$$2 \cdot \beta_1 \cong 2 \cdot \operatorname{tg} \beta_1 = 2 \cdot \frac{v_{(x)}}{\frac{p}{2}} = 2 \cdot \frac{0,293}{3,535} = 0,16577086^\circ$$

$$s_1 = 8 \cdot r = 8 \cdot 5 = 40 \text{ m}$$

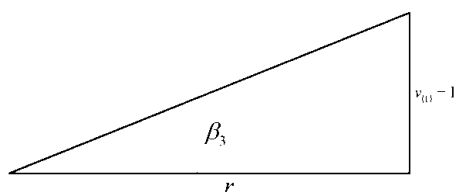


$$k = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{3,827}{2}\right)^2} = 4,619 \text{ m}$$



$$\beta_2 \cong \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{v_{(1)}}{k} = \frac{1}{4,619} = 0,21649708^\circ$$

$$s_2 = 8 \cdot s = 8 \cdot 3,827 = 30,616 \text{ m}$$



$$\beta_3 \cong \operatorname{tg} \beta_3 = \frac{v_{(1)}}{r} = \frac{1}{5} = 0,2^\circ$$

$$s_3 = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 31,416 \text{ m}$$

## MEZNÍ ZATÍŽENÍ

$$p = \frac{\sum M_p \cdot s \cdot \beta_i}{V_{\text{celkem}}}$$

pro tloušťku desky 150 mm:

$$p = \frac{0,5625 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 0,16577 + 0,5625 \cdot 10^3 \cdot 30,616 \cdot 0,216497 + 0,5625 \cdot 10^3 \cdot 31,416 \cdot 0,2}{23,569}$$

$$p = 466,398 \text{ N} / \text{m}^2$$

$$p = 0,466 \text{ kN} / \text{m}^2$$





pro tloušťku desky 1 000 mm:

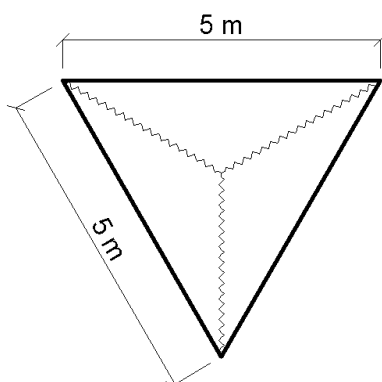
$$p = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 0,16577086 + 25 \cdot 10^3 \cdot 30,616 \cdot 0,21649708 + 25 \cdot 10^3 \cdot 31,416 \cdot 0,2}{23,569}$$

$$p = 20\,728,788 \text{ N} / \text{m}^2$$

$$p = 20,729 \text{ kN} / \text{m}^2$$

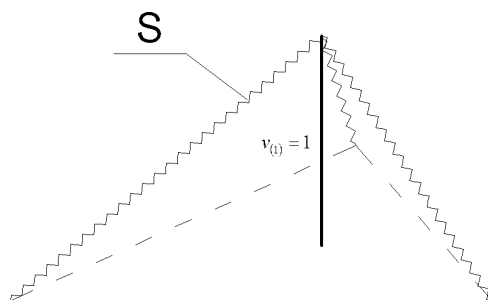
#### 4.1.6 TROJÚHELNÍKOVÁ DESKA strana 5 m

Deska s trojúhelníkovou geometrií, která je vykreslena na obrázku 4.1.6.1, byla řešena jako prostě podepřená s uvažovaným plným plošným rovnoměrným zatížením. Předpokládaný kinematický mechanismus porušení je vykreslen cikcak čarou.



Obrázek 4.1.6.1 Geometrie desky a vykreslení kinematického mechanismu porušení.

Pro lepší představu je mechanismus vykreslen prostorově a otočen o  $180^\circ$ , jak ukazuje obrázek 4.1.6.2. Označení  $s$  platí pro délku plastických kloubů.



Obrázek 4.1.6.2 Zobrazení tvaru vzniklého mechanismu porušení a jednotková výška.

## MOMENT PRO PLNĚ ZPLASTIZOVANÝ PRŮŘEZ

$$M_p = \sigma_m \frac{h^2}{4}$$

pro tloušťku desky 150 mm:

$$M_p = 0,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,150^2}{4} = 562,5 \text{ Nm}^2 = 0,5625 \text{ kNm}^2$$

pro tloušťku desky 1 000 mm:

$$M_p = 0,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{1,000^2}{4} = 25000 \text{ Nm}^2 = 25 \text{ kNm}^2$$

## OBJEM TĚLESA VZNIKLÉHO MECHANISMEM PORUŠENÍ

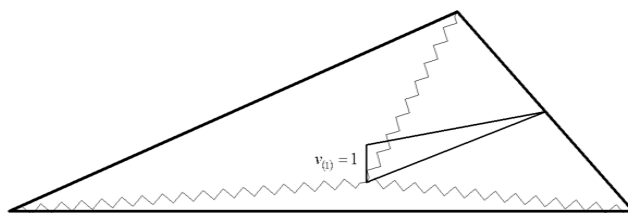
$$v = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 4,330 \text{ m}$$

$$S_p = \frac{l v}{2} = \frac{5 \cdot 4,330}{2} = 10,825 \text{ m}^2$$

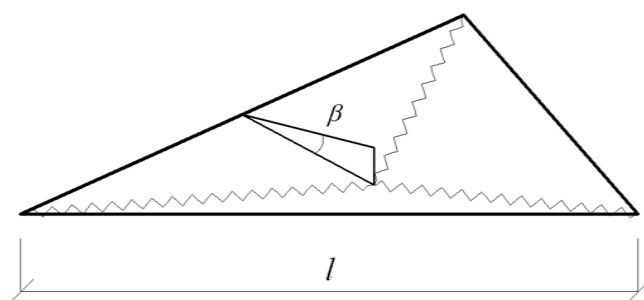
$$V_{celkem} = \frac{1}{3} S_p \cdot v_{(1)} = \frac{1}{3} \cdot 10,825 \cdot 1 = 3,608\bar{3} \text{ m}^3$$

## DÉLKA PLASTICKÝCH KLOUBŮ

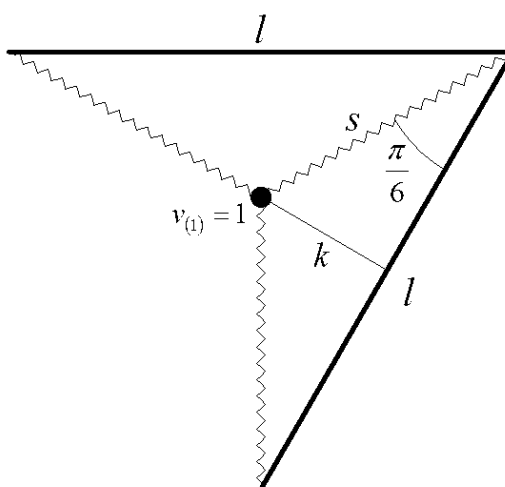
Obrázky 4.1.6.3 a 4.1.6.4 zobrazují jednotkovou výšku uvažovanou při výpočtu mezního zatížení a řešený úhel, který vznikne při vytvoření předpokládaného mechanismu porušení.

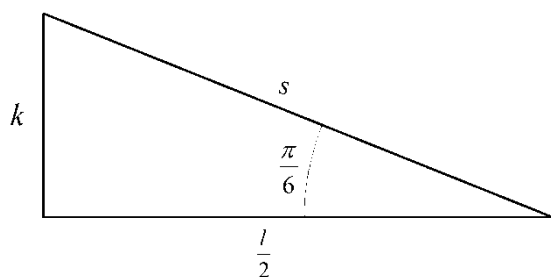


Obrázek 4.1.6.3 Jednotková výška dráhy mechanismu.



Obrázek 4.1.6.4 Určení úhlu dráhy mechanismu porušení.



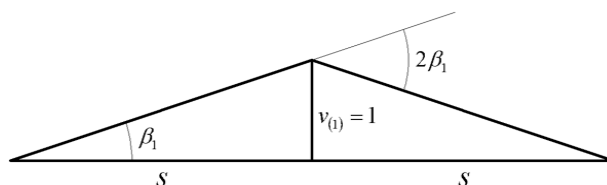


$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{k}{\frac{l}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{k}{\frac{5}{2}}$$

$$k = 1,4434 \text{ m}$$

$$s = \sqrt{k^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{1,4434^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 2,887 \text{ m}$$



$$2 \cdot \beta_1 \cong 2 \cdot \operatorname{tg} \beta_1 = 2 \cdot \frac{v_{(i)}}{s} = 2 \cdot \frac{1}{2,887} = 0,69276065^\circ$$

$$s_1 = 3 \cdot s = 3 \cdot 2,887 = 8,661 \text{ m}$$

## MEZNÍ ZATÍŽENÍ

$$p = \frac{\sum M_p \cdot s \cdot \beta_i}{V_{\text{celkem}}}$$

pro tloušťku desky 150 mm:

$$p = \frac{0,5625 \cdot 10^3 \cdot 8,661 \cdot 0,69276065}{3,6083} = 935,344 \text{ N/m}^2$$

$$p = 0,935 \text{ kN/m}^2$$

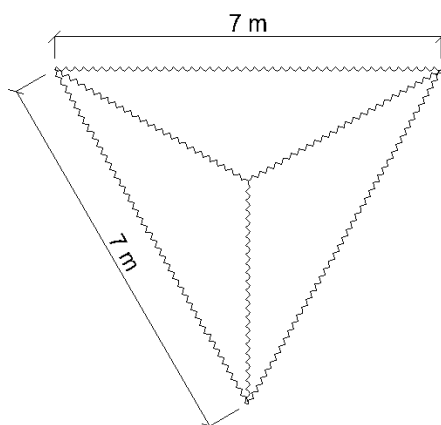
pro tloušťku desky 1 000 mm:

$$p = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 8,661 \cdot 0,69276065}{3,6083} = 41\,570,823 \text{ N} / \text{m}^2$$

$$p = 41,571 \text{ kN} / \text{m}^2$$

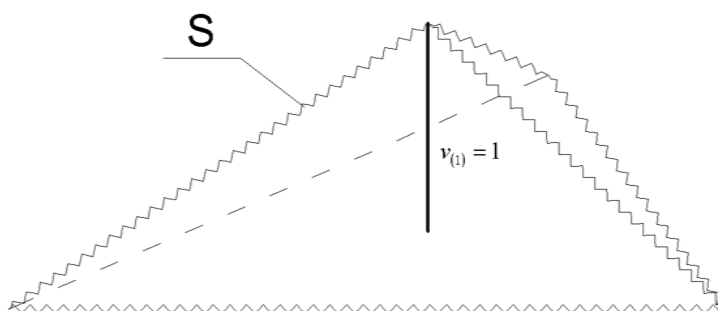
#### 4.1.7 TROJÚHELNÍKOVÁ DESKA strana 7 m

Geometrie trojúhelníkové desky vetknuté na všech stranách je vykreslena na obrázku 4.1.7.1. Předpokládaný mechanismus porušení uvažuje účinek vetknutí, na obrázku je vykreslen cikcak čarou. Deska byla řešena pro plné plošné rovnoměrné zatížení.



Obrázek 4.1.7.1 Geometrie desky a vykreslení kinematického mechanismu porušení.

Mechanismus porušení, pro který byla deska řešena, je srozumitelnější v prostorovém zobrazení na obrázku 4.1.7.2. Mechanismus je otočený o 180°.



Obrázek 4.1.7.2 Zobrazení tvaru vzniklého mechanismu porušení a jednotková výška.

## MOMENT PRO PLNĚ ZPLASTIZOVANÝ PRŮŘEZ

$$M_p = \sigma_m \frac{h^2}{4}$$

pro tloušťku desky 150 mm:

$$M_p = 0,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,150^2}{4} = 562,5 \text{ Nm}^2 = 0,5625 \text{ kNm}^2$$

pro tloušťku desky 1 000 mm:

$$M_p = 0,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{1,000^2}{4} = 25000 \text{ Nm}^2 = 25 \text{ kNm}^2$$

## OBJEM TĚLESA VZNIKLÉHO MECHANISMEM PORUŠENÍ

$$v = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{7^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = 6,062 \text{ m}$$

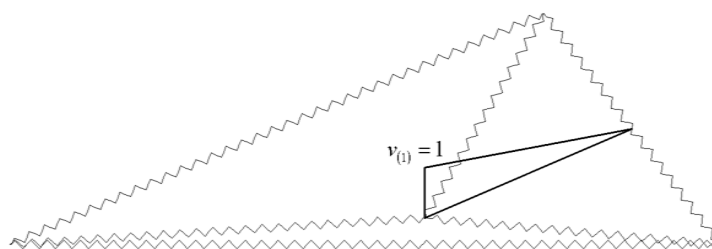
$$S_p = \frac{l v}{2} = \frac{7 \cdot 6,062}{2} = 21,217 \text{ m}^2$$

$$V_{\text{celkem}} = \frac{1}{3} S_p \cdot v_{(1)} = \frac{1}{3} \cdot 21,217 \cdot 1 = 7,072 \text{ m}^3$$

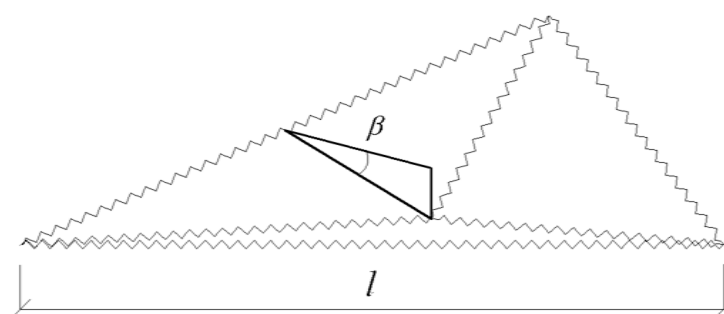
## DÉLKA PLASTICKÝCH KLOUBŮ

Mezní zatížení pro trojúhelníkovou desku bylo řešeno s uvažováním jednotkové výšky vzniklého mechanismu, viz obrázek 4.1.7.3. Jeden ze zjišťovaných úhlů způsobených vznikem plastického porušení je naznačen na obrázku 4.1.7.4.

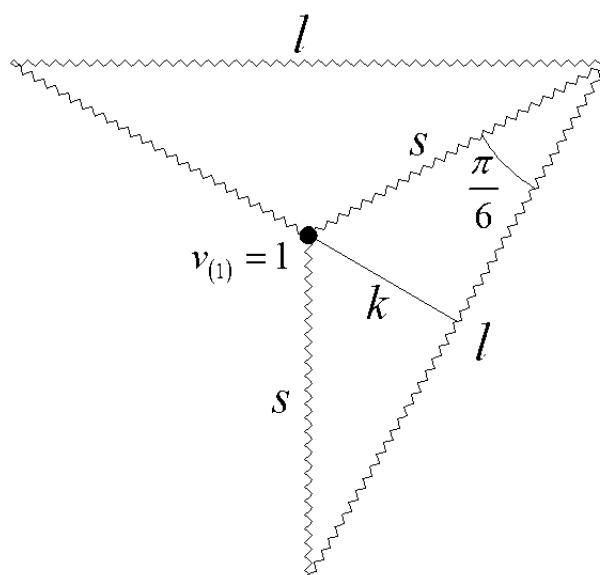


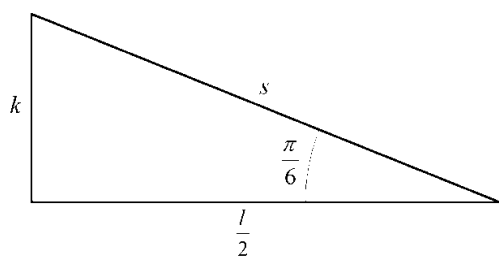


Obrázek 4.1.7.3 Jednotková výška dráhy mechanismu.



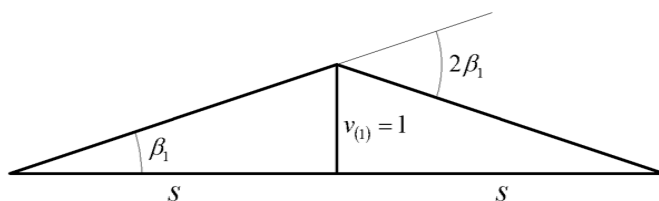
Obrázek 4.1.7.4 Určení úhlu dráhy mechanismu porušení.





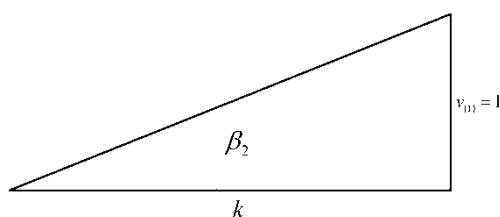
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} &= \frac{k}{\frac{l}{2}} \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} &= \frac{k}{\frac{7}{2}} \\ k &= 2,021 \, m \end{aligned}$$

$$s = \sqrt{k^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{2,021^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} = 4,042 \, m$$



$$2 \cdot \beta_1 \cong 2 \cdot \operatorname{tg} \beta_1 = 2 \cdot \frac{v_{(i)}}{s} = 2 \cdot \frac{1}{4,042} = 0,49480455^\circ$$

$$s_1 = 3 \cdot s = 3 \cdot 4,042 = 12,126 \, m$$



$$\beta_2 \cong \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{v_{(i)}}{k} = \frac{1}{2,021} = 0,49480455^\circ$$

$$s_1 = 3 \cdot l = 3 \cdot 7 = 21 \, m$$

## MEZNÍ ZATÍŽENÍ

$$p = \frac{\sum M_p \cdot s \cdot \beta_i}{V_{celkem}}$$

pro tloušťku desky 150 mm:

$$p = \frac{0,5625 \cdot 10^3 \cdot 12,126 \cdot 0,49480455 + 0,5625 \cdot 10^3 \cdot 21 \cdot 0,49480455}{7,072} = 1\,303,716 \, N / m^2$$

$$p = 1,304 \, kN / m^2$$

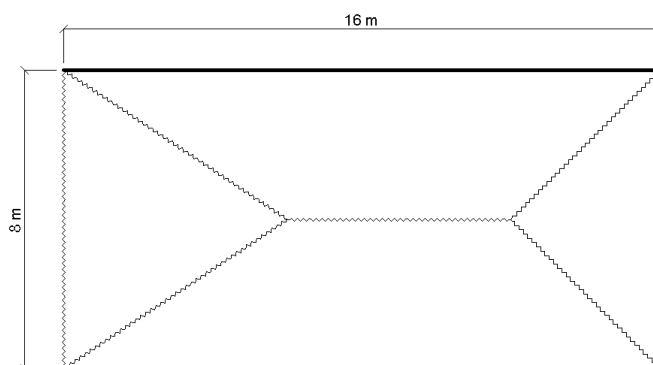
pro tloušťku desky 1 000 mm:

$$p = \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 12,126 \cdot 0,49480455 + 25 \cdot 10^3 \cdot 21 \cdot 0,49480455}{7,072} = 57\,942,928 \, N / m^2$$

$$p = 57,943 \, kN / m^2$$

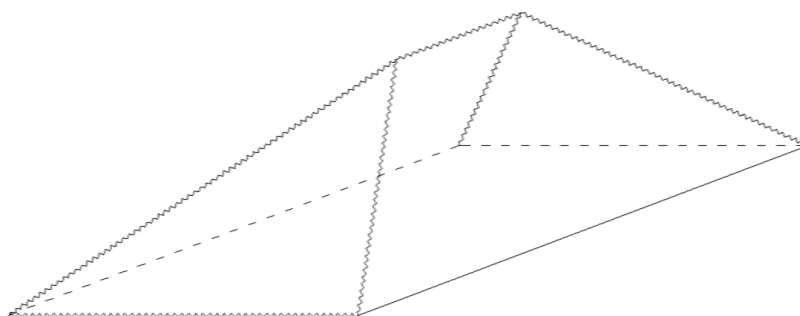
#### 4.1.8 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 16 x 8 m, nesymetricky uložená

Následné mezní zatížení bylo řešeno pro obdélníkovou desku nesymetricky podepřenou. Jedna kratší strana je vetknutá, zbylé strany jsou prostě podepřené. Z obrázku 4.1.8.1 je patrné, že předpokládaný kinematický mechanismus porušení liší ve srovnání s deskou 4.1.1. U vetknuté strany se změnil úhel, pod kterým vzniká plastický kloub, tím došlo ke zkrácení prostředního rovného plastického kloubu. Při výpočtu se opět uvažovalo plné plošné rovnoměrné zatížení.



Obrázek 4.1.8.1 Geometrie desky a vykreslení kinematického mechanismu porušení.

V prostorovém zobrazení otočeném o  $180^\circ$  je patrné prodloužení dvou plastických kloubů v oblasti vetknuté strany.



Obrázek 4.1.8.2 Zobrazení tvaru vzniklého mechanismu porušení.

## MOMENT PRO PLNĚ ZPLASTIZOVANÝ PRŮŘEZ

$$M_p = \sigma_m \frac{h^2}{4}$$

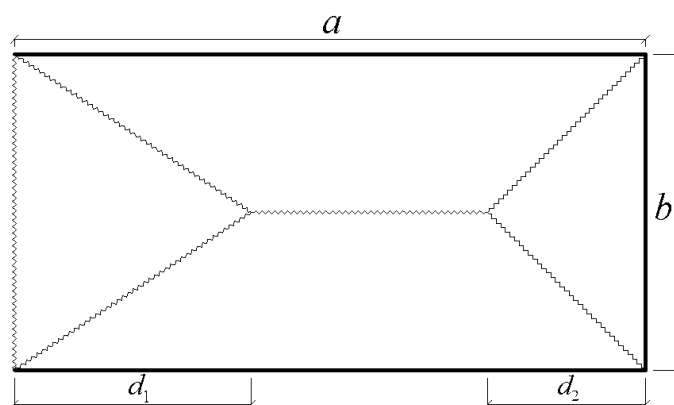
pro tloušťku desky 150 mm:

$$M_p = 0,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,150^2}{4} = 562,5 \text{ Nm}^2 = 0,5625 \text{ kNm}^2$$

pro tloušťku desky 1 000 mm:

$$M_p = 0,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{1,000^2}{4} = 25000 \text{ Nm}^2 = 25 \text{ kNm}^2$$

## VÝPOČET MEZNÍHO ZATÍŽENÍ



Řešení je prováděno kinematickou metodou, pomocí vzorců pro mezní stav rovnoměrně zatížené obdélníkové vrstevnatě ortotropní desky. Protože zadání desky je izotropní, potom ve všech směrech působí stejné mezní momenty. Proto je za jednotlivé momenty dosazována hodnota dříve vypočteného mezního momentu. Platí, že  $M_m = M_p$ .

$$\phi = \frac{M_{mx}}{M_{my}} = \frac{M_p}{M_p} = \frac{0,5625 \cdot 10^3}{0,5625 \cdot 10^3} = 1$$

$$\nu = \frac{M'_{mx}}{M_{mx}} = \frac{M_p}{M_p} = \frac{0,5625 \cdot 10^3}{0,5625 \cdot 10^3} = 1$$

$$\mu = \frac{M'_{my}}{M_{my}} = \frac{M_p}{M_p} = \frac{0,5625 \cdot 10^3}{0,5625 \cdot 10^3} = 1$$

$$\xi = \frac{b}{a} = \frac{8}{16} = 0,5$$

$$\xi = 0,5 < \frac{2}{(1 + \sqrt{1 + \nu})\sqrt{\phi}} = \frac{2}{(1 + \sqrt{1 + 1})\sqrt{1}} = 0,8284$$

$$z = \frac{1 + \sqrt{1 + \nu}}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 + 1}}{2} = 1,2071$$

$$\gamma = \phi z \left( \sqrt{\frac{3}{\phi z^2} + \xi^2} - \xi \right) = 1 \cdot 1,2071 \left( \sqrt{\frac{3}{1 \cdot 1,2071^2} + 0,5^2} - 0,5 \right) = 1,2306$$

$$d_1 = \frac{b}{2} \gamma = \frac{8}{2} 1,2306 = 4,9226 \text{ m}$$

$$d_2 = d_1 \sqrt{1 + \nu} = 4,9226 \sqrt{1 + 1} = 6,9616 \text{ m}$$

$$M_p = \frac{p b^2}{24} \gamma^2 \Rightarrow \frac{24 M_p}{b^2 \gamma^2} = p$$

pro tloušťku desky 150 mm:

$$p = \frac{24 \cdot 0,5625 \cdot 10^3}{8^2 \cdot 1,2306^2} = 139,290 \text{ N} / \text{m}^2$$

$$p = 0,139 \text{ kN} / \text{m}^2$$

Protože pro tloušťku desky 1 000 mm jsou výsledné hodnoty stejné, není třeba výpočty opakovat a lze vyřešit pouze mezní zatížení.

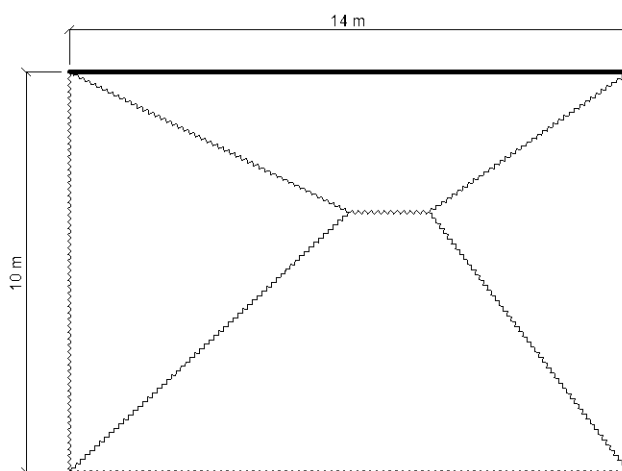
pro tloušťku desky 1 000 mm:

$$p = \frac{24 \cdot 25 \cdot 10^3}{8^2 \cdot 1,2306^2} = 6\,190,667 \text{ N} / \text{m}^2$$

$$p = 6,161 \text{ kN} / \text{m}^2$$

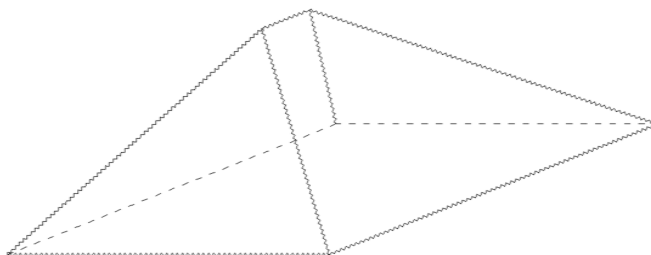
#### 4.1.9 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 14 x 10 m, nesymetricky uložená

Následující obdélníková deska, pro kterou bylo řešeno mezní zatížení, je nesymetricky uložena. Jedna kratší a jedna delší strana jsou vetknuty, zbylé strany prostě podepřeny. Ve srovnání s deskou 4.1.2 došlo k výrazné změně předpokládaného kinematického mechanismu porušení. Tvar uvažovaného mechanismu je zobrazen na obrázku 4.1.9.1. Plastické klouby jsou vykresleny cikcak čarou. Výpočet je proveden pro plné rovnoměrné plošné zatížení.



Obrázek 4.1.9.1 Geometrie desky a vykreslení kinematického mechanismu porušení.

Změna tvaru předpokládaného mechanismu je zřejmá i z prostorového zobrazení otočeného o 180°, viz obrázek 4.1.9.2.





Obrázek 4.1.9.2 Zobrazení tvaru vzniklého mechanismu porušení.

## MOMENT PRO PLNĚ ZPLASTIZOVANÝ PRŮŘEZ

$$M_p = \sigma_m \frac{h^2}{4}$$

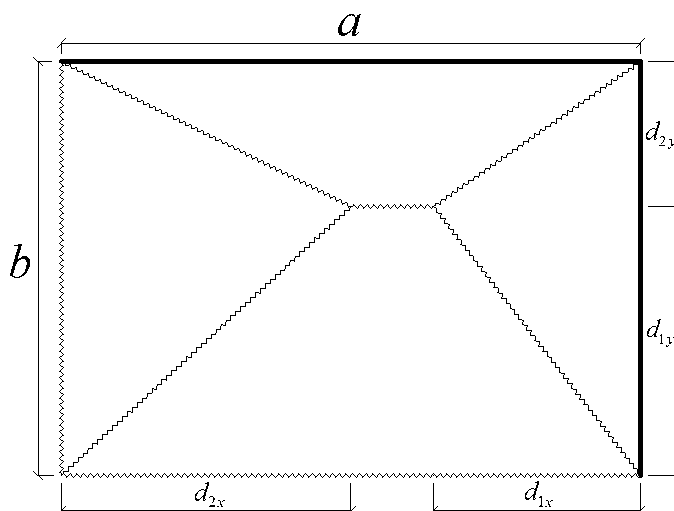
pro tloušťku desky 150 mm:

$$M_p = 0,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,150^2}{4} = 562,5 \text{ Nm}^2 = 0,5625 \text{ kNm}^2$$

pro tloušťku desky 1 000 mm:

$$M_p = 0,1 \cdot 10^6 \cdot \frac{1,000^2}{4} = 25000 \text{ Nm}^2 = 25 \text{ kNm}^2$$

## VÝPOČET MEZNÍHO ZATÍŽENÍ



Stejně jako v předešlém případě je řešení prováděno kinematickou metodou, pomocí vzorců pro mezní stav rovnoměrně zatížené obdélníkové vrstevnatě ortotropní desky. Protože zadání desky je izotropní, potom ve všech směrech působí stejné mezní momenty. Platí, že  $M_m = M_p$ .

$$\phi = \frac{M_{mx}}{M_{my}} = \frac{M_p}{M_p} = \frac{0,5625 \cdot 10^3}{0,5625 \cdot 10^3} = 1$$

$$\nu = \frac{M'_{mx}}{M_{mx}} = \frac{M_p}{M_p} = \frac{0,5625 \cdot 10^3}{0,5625 \cdot 10^3} = 1$$

$$\mu = \frac{M'_{my}}{M_{my}} = \frac{M_p}{M_p} = \frac{0,5625 \cdot 10^3}{0,5625 \cdot 10^3} = 1$$

$$\xi = \frac{b}{a} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$\xi = \frac{5}{7} < \frac{1 + \sqrt{1 + \mu}}{1 + \sqrt{1 + \nu}} \frac{1}{\sqrt{\phi}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 1}}{1 + \sqrt{1 + 1}} \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

$$s = 1 + \sqrt{1 + \nu} = 1 + \sqrt{1 + 1} = 2,4142 \text{ m}$$

$$w = 1 + \sqrt{1 + \mu} = 1 + \sqrt{1 + 1} = 2,4142 \text{ m}$$

$$\gamma = \phi \frac{2s}{w^2} \left( \sqrt{\frac{3w^2}{\phi s^2} + \xi^2} - \xi \right)$$

$$\gamma = 1 \cdot \frac{2 \cdot 2,4142}{2,4142^2} \left[ \sqrt{\frac{3 \cdot 2,4142^2}{1 \cdot 2,4142^2} + \left(\frac{5}{7}\right)^2} - \frac{5}{7} \right] = 0,9604$$

$$d_{1x} = \frac{b}{2} \gamma = \frac{10}{2} 0,9604 = 4,802 \text{ m}$$

$$d_{2x} = d_{1x} \sqrt{1 + \nu} = 4,802 \sqrt{1 + 1} = 6,791 \text{ m}$$

$$d_{2y} = \frac{b}{1 + \sqrt{1 + \mu}} = \frac{10}{1 + \sqrt{1 + 1}} = 4,1421 \text{ m}$$

$$d_{1y} = b - d_{2y} = 10 - 4,1421 = 5,8579 \text{ m}$$

$$M_p = \frac{p b^2}{24} \gamma^2 \Rightarrow \frac{24 M_p}{b^2 \gamma^2} = p$$

pro tloušťku desky 150 mm:

$$p = \frac{24 \cdot 0,5625 \cdot 10^3}{8^2 \cdot 0,9604^2} = 146,362 \text{ N / m}^2$$

$$p = 0,146 \text{ kN / m}^2$$

Protože pro tloušťku desky 1 000 mm jsou výsledné hodnoty stejné, není třeba výpočty opakovat a lze vyřešit pouze mezní zatížení.

pro tloušťku desky 1 000 mm:

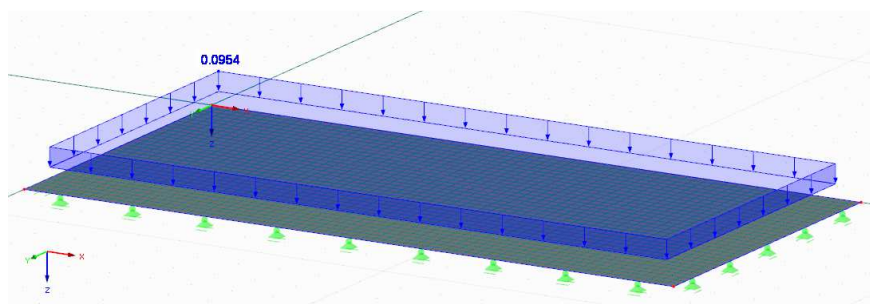
$$p = \frac{24 \cdot 25 \cdot 10^3}{8^2 \cdot 0,9604^2} = 6\,504,995 \text{ N / m}^2$$

$$p = 6,505 \text{ kN / m}^2$$

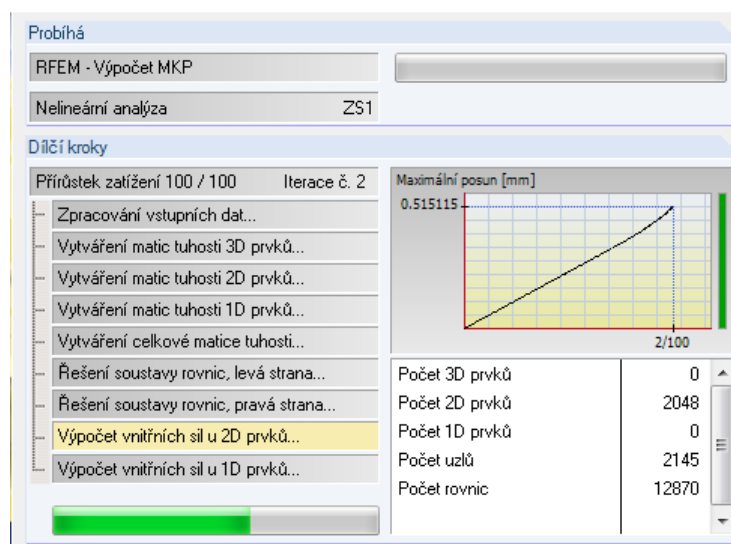
## 4.2 ŘEŠENÍ V PROGRAMU RFEM

Modely vytvořené v programu RFEM odpovídají geometrii ručnímu řešení. Všechny desky jsou řešeny pro tloušťku 150 mm a 1 000 mm. Zatížení bylo upraveno s využitím nejobecnější teorie plasticity podle Ljapunova, tj. že bylo uvažováno zatížení, které odpovídá většímu nárůstu průhybu.

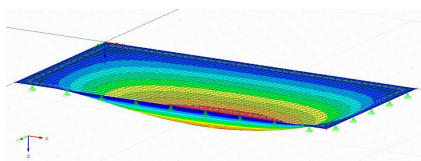
### 4.2.1 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 16 x 8 m, tloušťka 150 mm



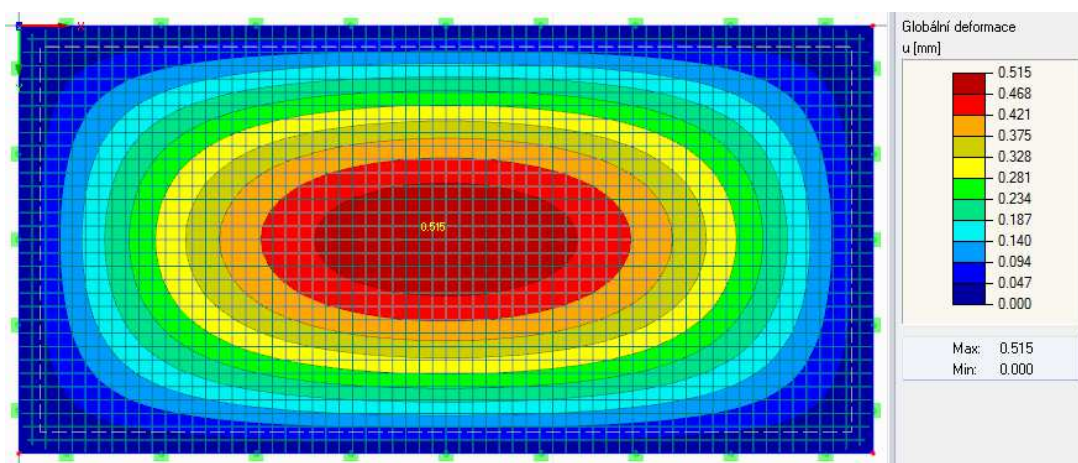
Obrázek 4.2.1.1 Geometrie obdélníkové desky zatížena uvažovaným plošným mezním zatížením.



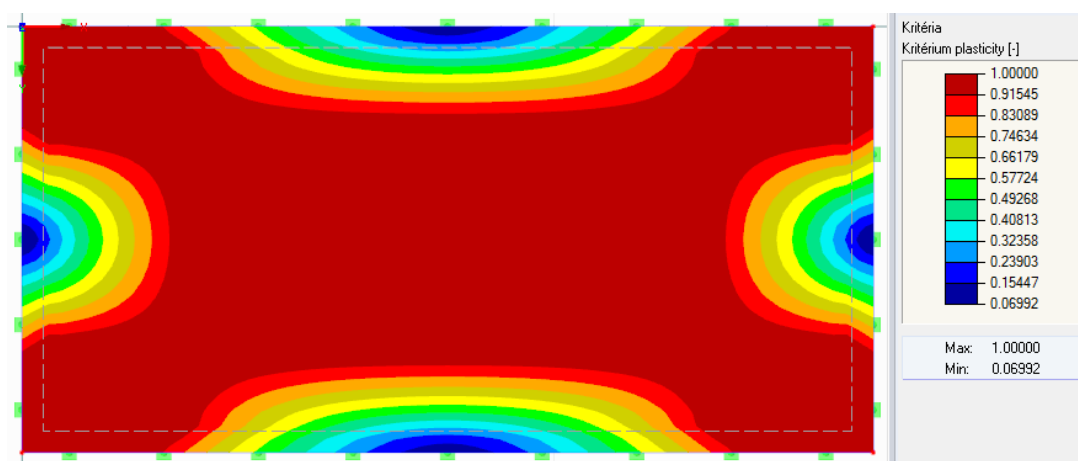
Obrázek 4.2.1.2 Zobrazení grafu průběhu výpočtu – závislost maximálního posunu ve směru osy z a přírůstku zatížení.



Obrázek 4.2.1.3 Výsledná globální deformace – průhyb ve směru osy z. Velikost deformace byla zvětšena násobkem 3500.

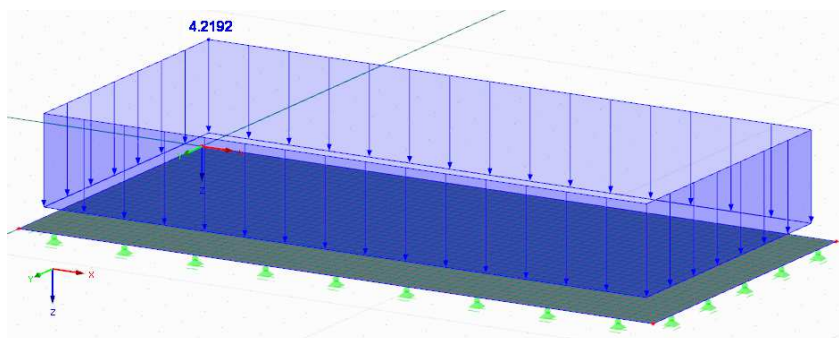


Obrázek 4.2.1.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z a výsledkový panel.

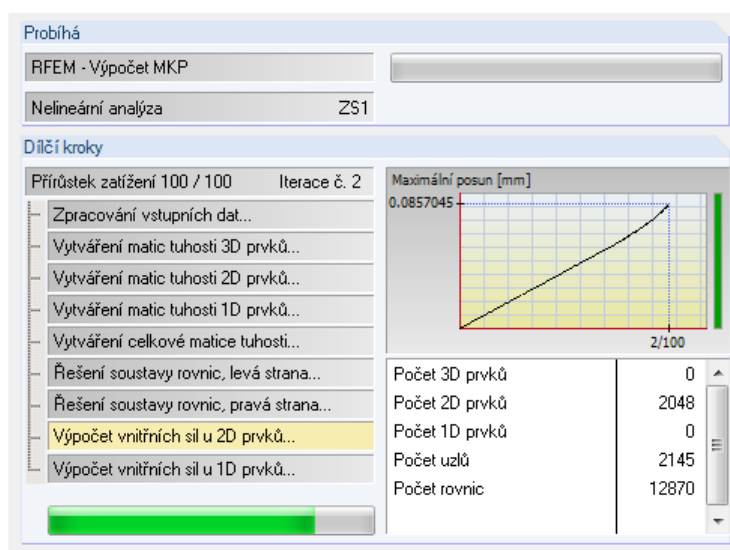


Obrázek 4.2.1.5 Zobrazení průběhu zplastizování.

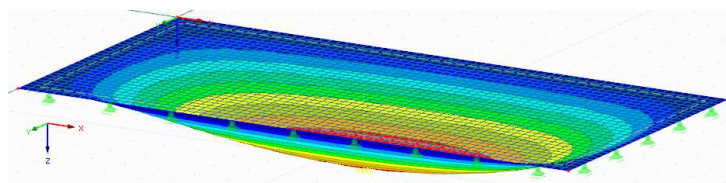
## 4.2.2 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 16 x 8 m tloušťka 1 000 mm



Obrázek 4.2.2.1 Geometrie obdélníkové desky zatížena uvažovaným plošným mezním zatížením.

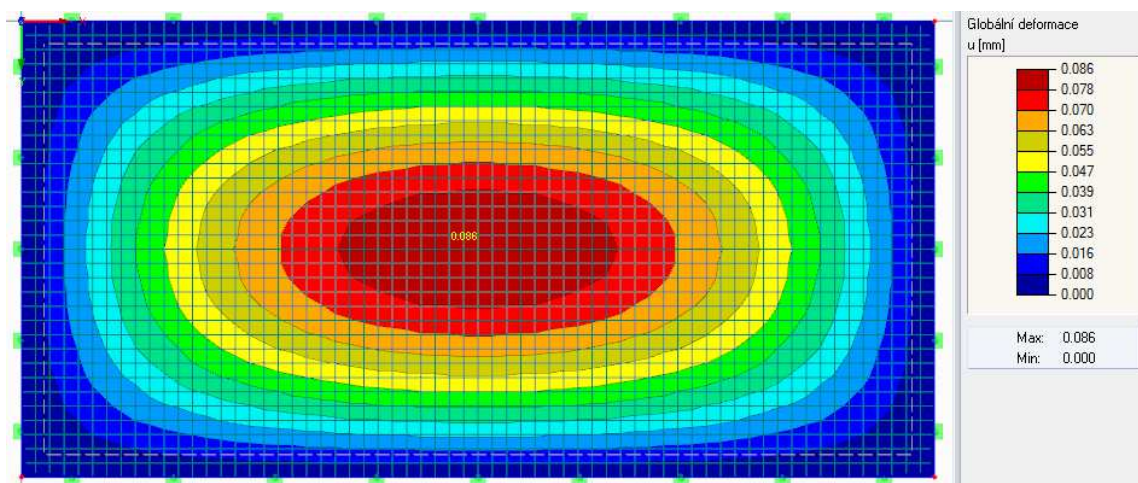


Obrázek 4.2.2.2 Zobrazení grafu průběhu výpočtu – závislost maximálního posunu ve směru osy z a přírůstku zatížení.

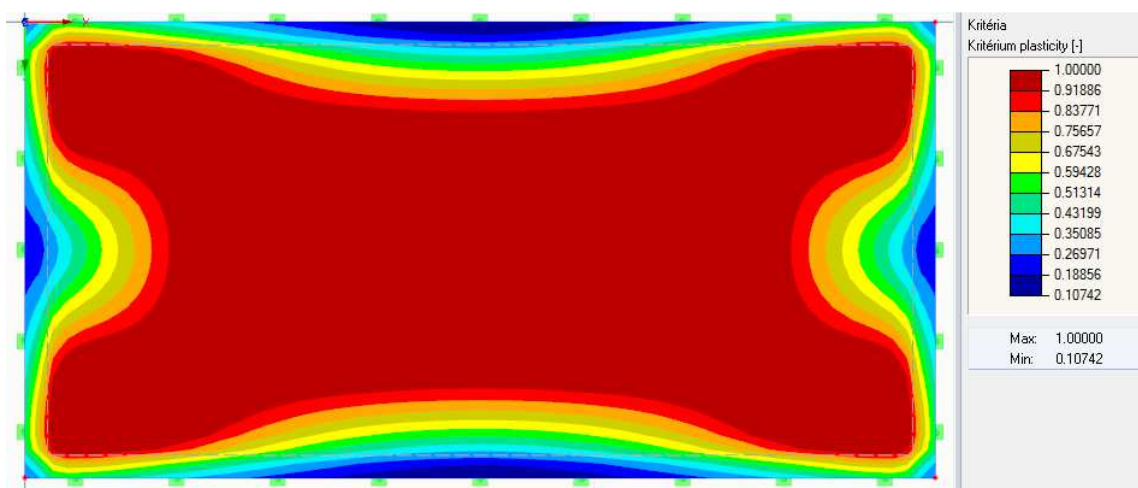


Obrázek 4.2.2.3 Výsledná globální deformace – průhyb ve směru osy z. Velikost deformace byla zvětšena násobkem 21000.



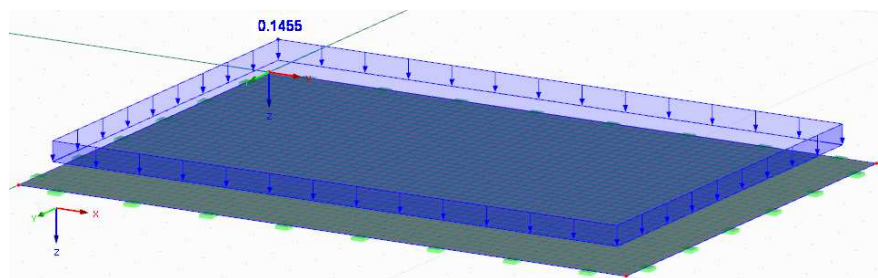


Obrázek 4.2.2.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z a výsledkový panel.

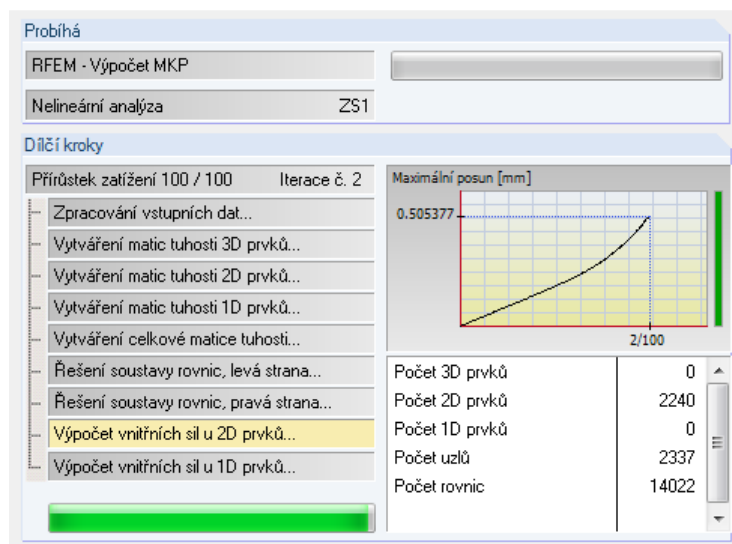


Obrázek 4.2.2.5 Zobrazení průběhu zplastizování.

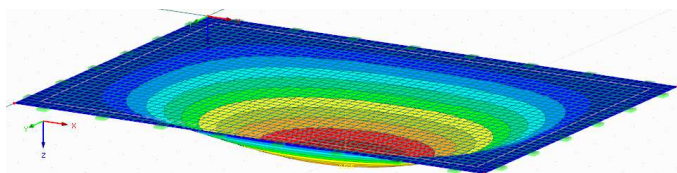
### 4.2.3 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 14 x 10 m, tloušťka 150 mm



Obrázek 4.2.3.1 Geometrie obdélníkové desky zatížena uvažovaným plošným mezním zatížením.

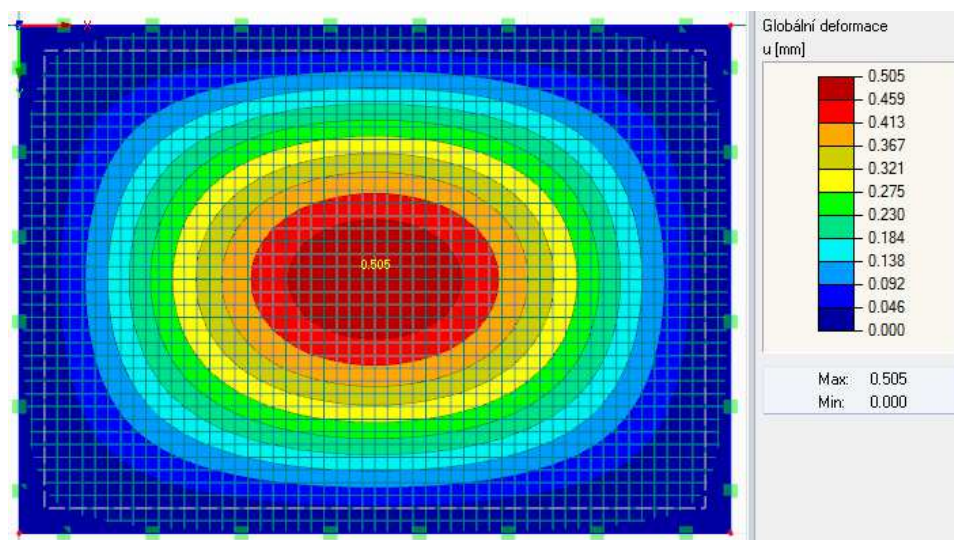


Obrázek 4.2.3.2 Zobrazení grafu průběhu výpočtu – závislost maximálního posunu ve směru osy z a přírůstku zatížení.

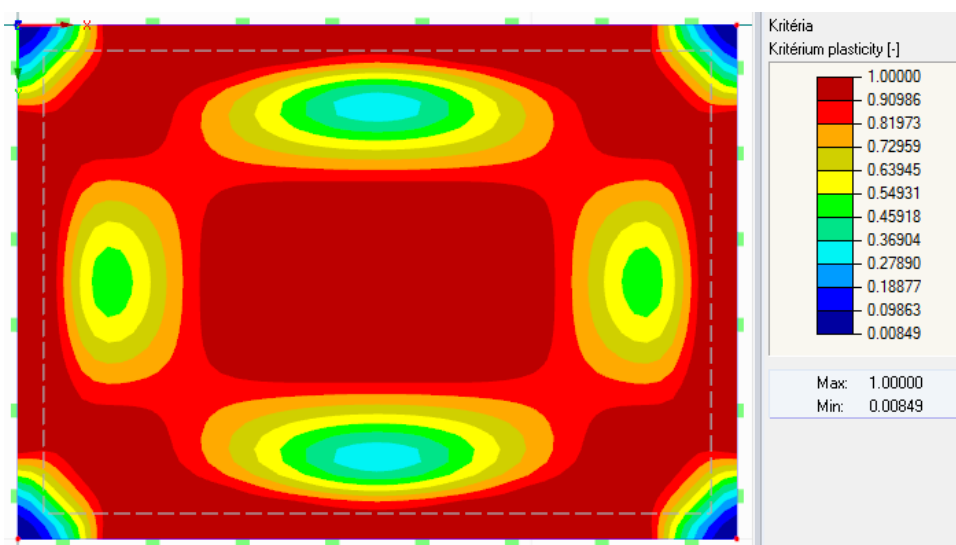


Obrázek 4.2.3.3 Výsledná globální deformace – průhyb ve směru osy z. Velikost deformace byla zvětšena násobkem 2400.



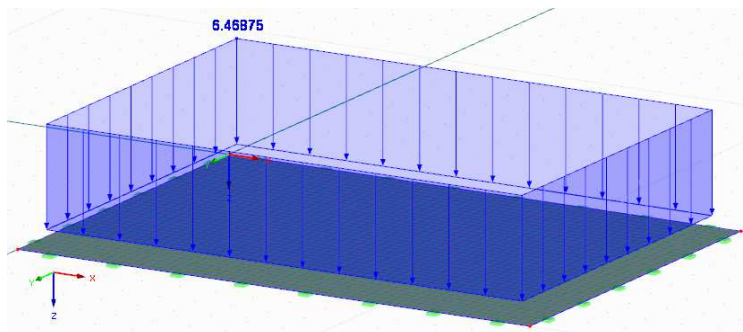


Obrázek 4.2.3.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z a výsledkový panel.

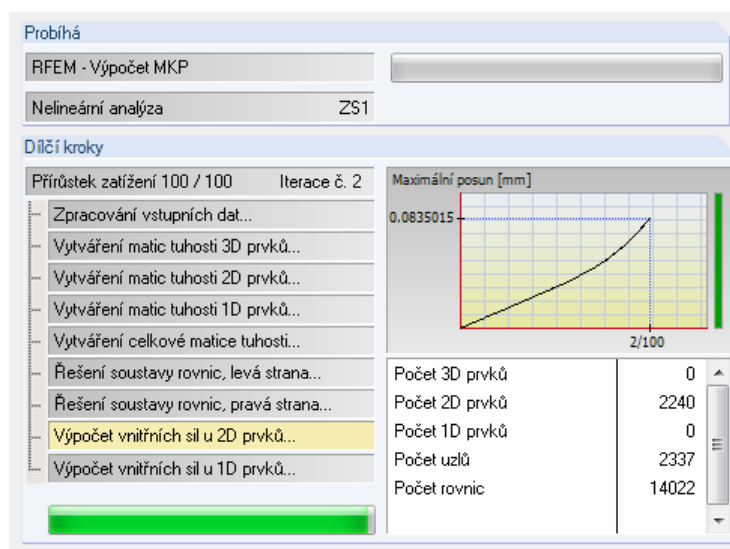


Obrázek 4.2.3.5 Zobrazení průběhu zplastizování.

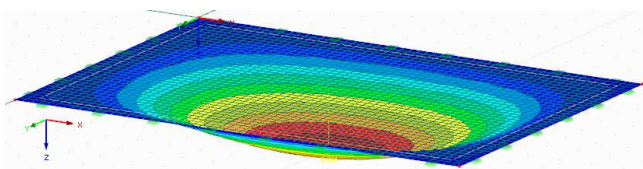
#### 4.2.4 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 14 x 10 m, tloušťka 1 000 mm



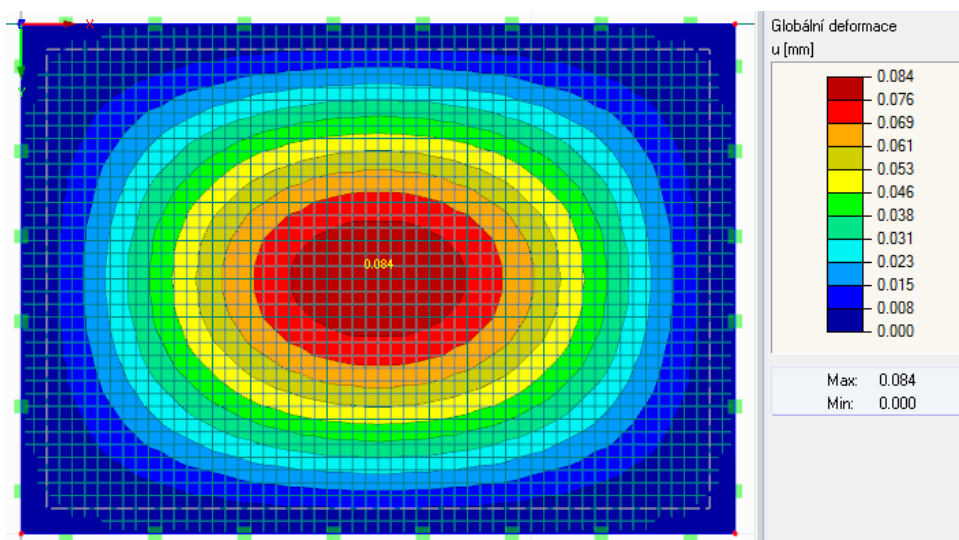
Obrázek 4.2.4.1 Geometrie obdélníkové desky zatížena uvažovaným plošným mezním zatížením.



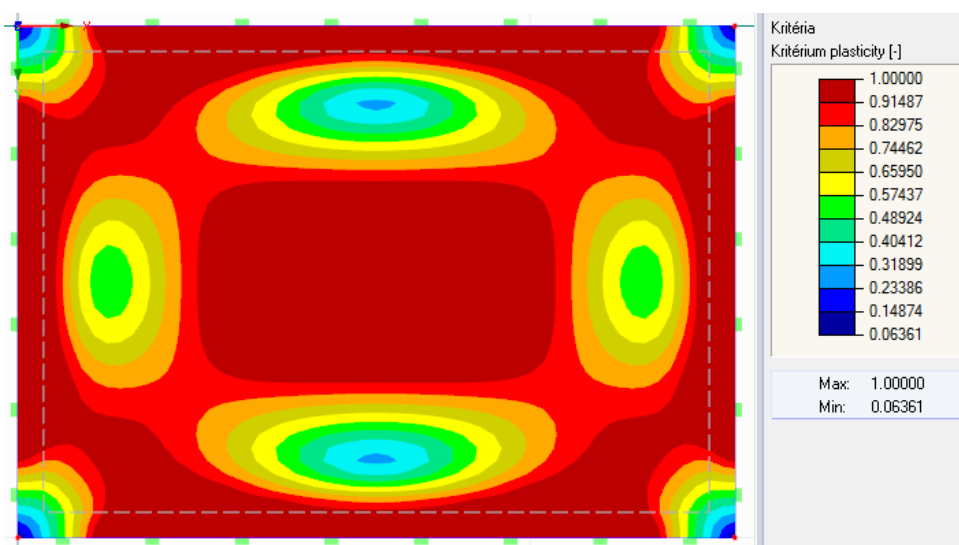
Obrázek 4.2.4.2 Zobrazení grafu průběhu výpočtu – závislost maximálního posunu ve směru osy z a přírůstku zatížení.



Obrázek 4.2.4.3 Výsledná globální deformace – průhyb ve směru osy z. Velikost deformace byla zvětšena násobkem 20000.

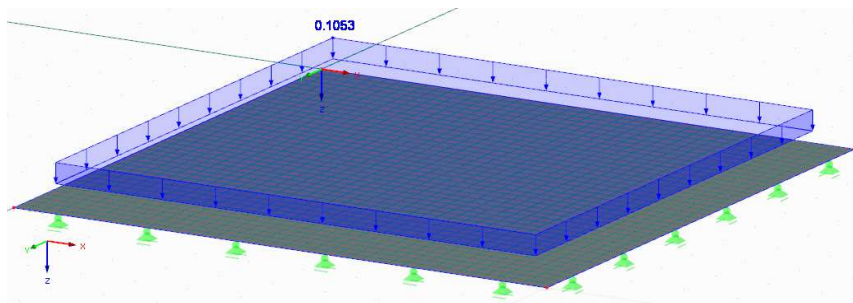


Obrázek 4.2.4.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z a výsledkový panel.

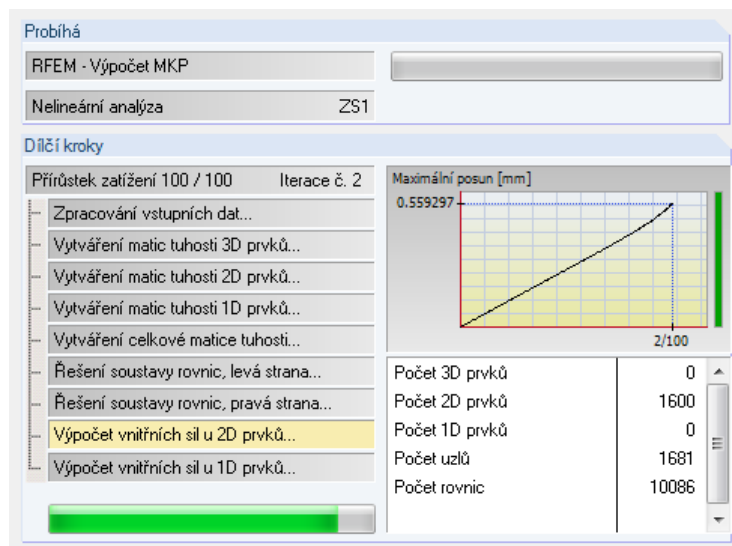


Obrázek 4.2.4.5 Zobrazení průběhu zplastizování.

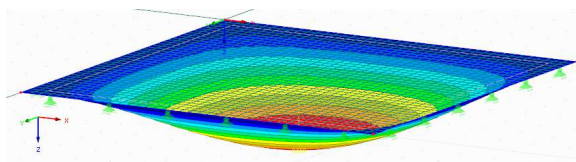
## 4.2.5 ČTVERCOVÁ DESKA 10 x 10 m, tloušťka 150 mm



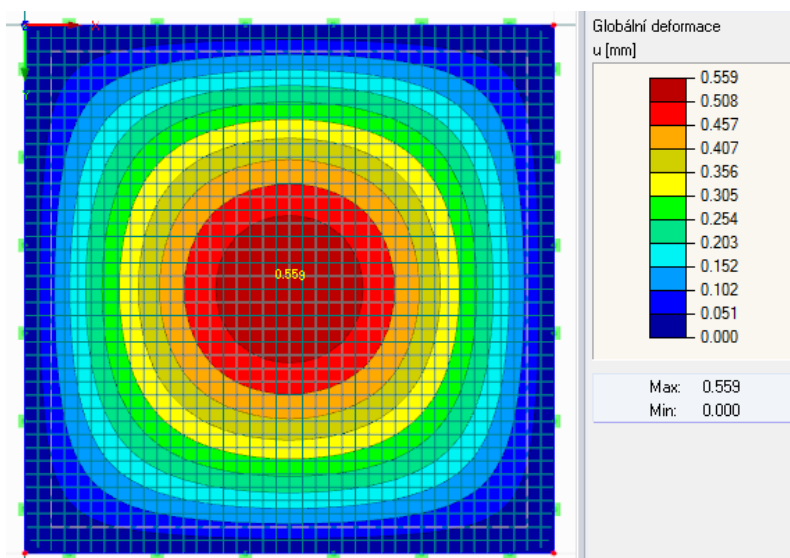
Obrázek 4.2.5.1 Geometrie čtvercové desky zatížena uvažovaným plošným mezním zatížením.



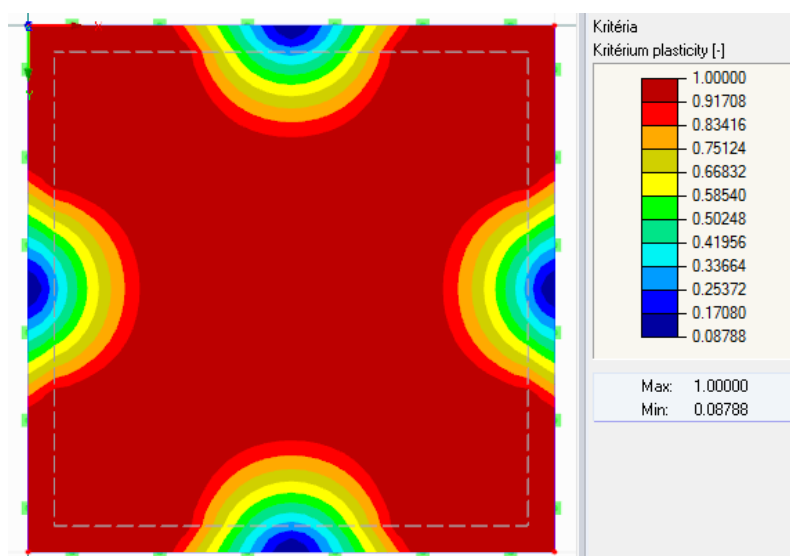
Obrázek 4.2.5.2 Zobrazení grafu průběhu výpočtu – závislost maximálního posunu ve směru osy z a přírůstku zatížení.



Obrázek 4.2.5.3 Výsledná globální deformace – průhyb ve směru osy z. Velikost deformace byla zvětšena násobkem 3000.

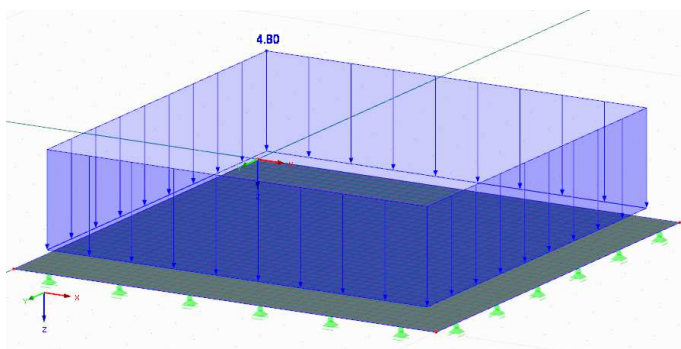


Obrázek 4.2.5.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z a výsledkový panel.

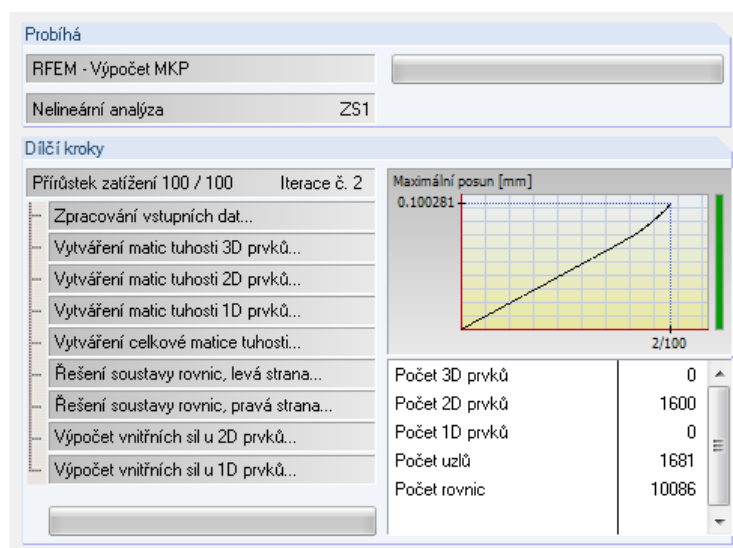


Obrázek 4.2.5.5 Zobrazení průběhu zplastizování.

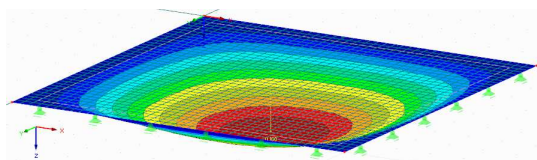
## 4.2.6 ČTVERCOVÁ DESKA 10 x 10 m, tloušťka 1 000 mm



Obrázek 4.2.6.1 Geometrie čtvercové desky zatížena uvažovaným plošným mezním zatížením.

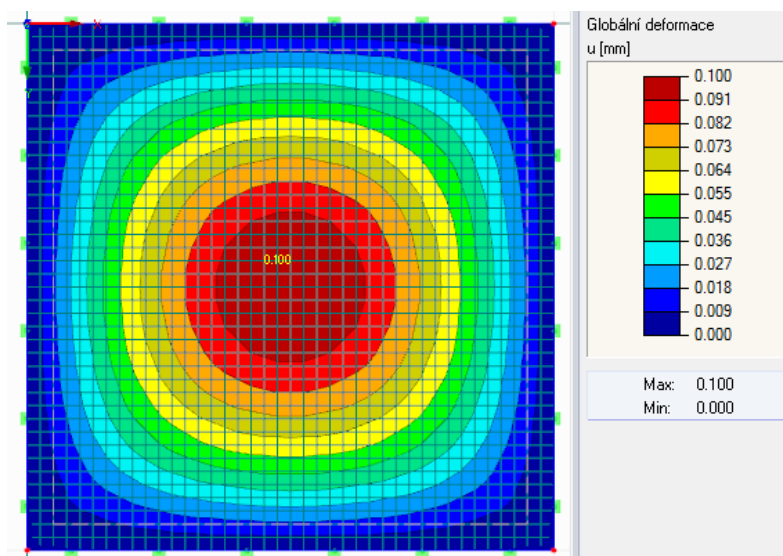


Obrázek 4.2.6.2 Zobrazení grafu průběhu výpočtu – závislost maximálního posunu ve směru osy z a přírůstku zatížení.

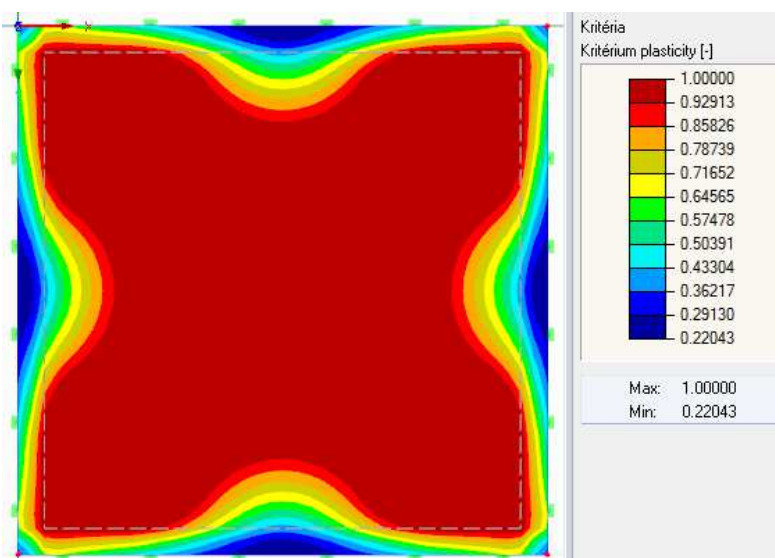


Obrázek 4.2.6.3 Výsledná globální deformace – průhyb ve směru osy z. Velikost deformace byla zvětšena násobkem 14000.



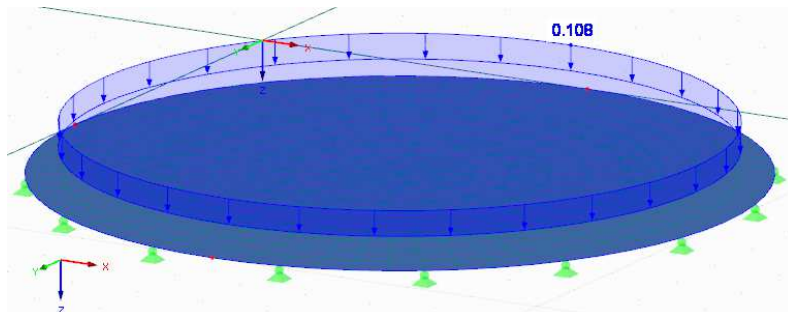


Obrázek 4.2.6.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z a výsledkový panel.

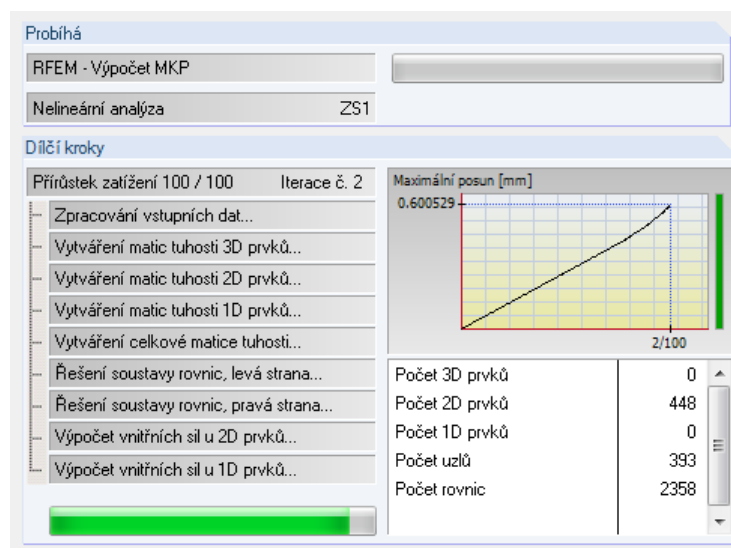


Obrázek 4.2.6.5 Zobrazení průběhu zplastizování.

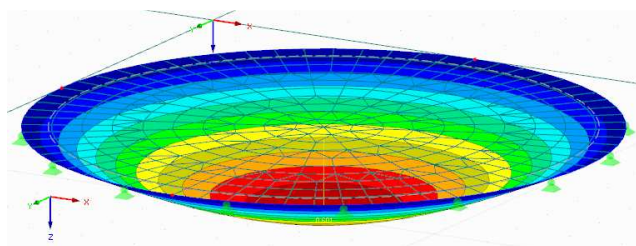
#### 4.2.7 KRUHOVÁ DESKA poloměr 5 m – 1. varianta mechanismu, tloušťka 150 mm



Obrázek 4.2.7.1 Geometrie kruhové desky zatížena uvažovaným plošným mezním zatížením.

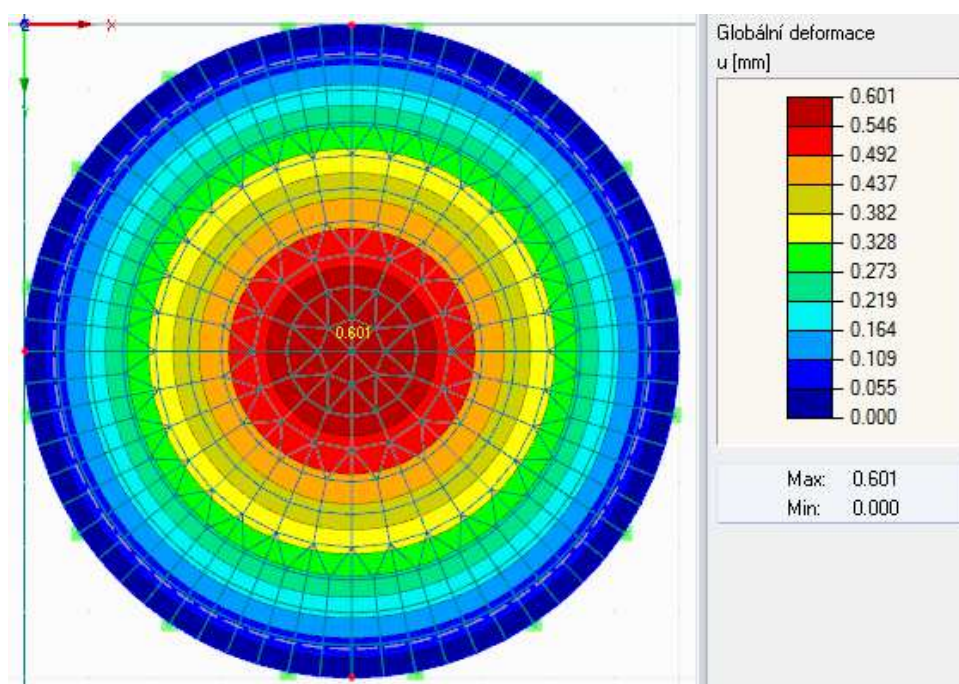


Obrázek 4.2.7.2 Zobrazení grafu průběhu výpočtu – závislost maximálního posunu ve směru osy z a přírůstku zatížení.

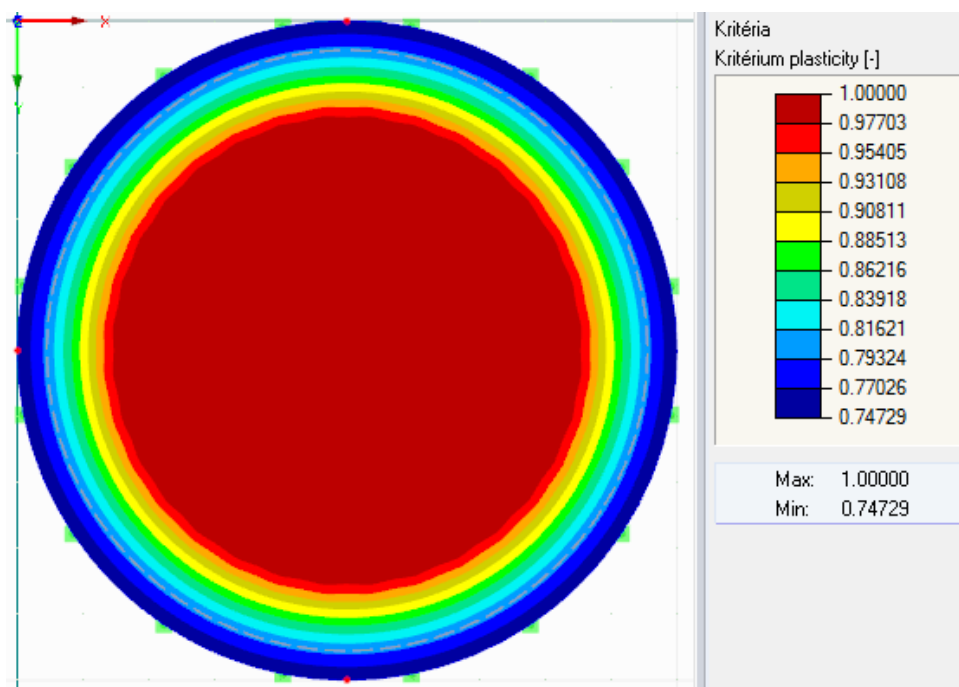


Obrázek 4.2.7.3 Výsledná globální deformace – průhyb ve směru osy z. Velikost deformace byla zvětšena násobkem 2400.



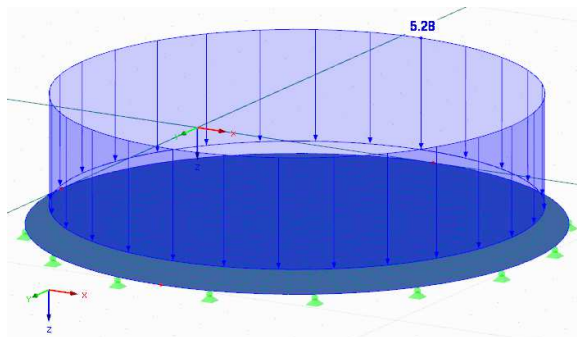


Obrázek 4.2.7. Výsledná globální deformace ve směru osy  $z$  a výsledkový panel.

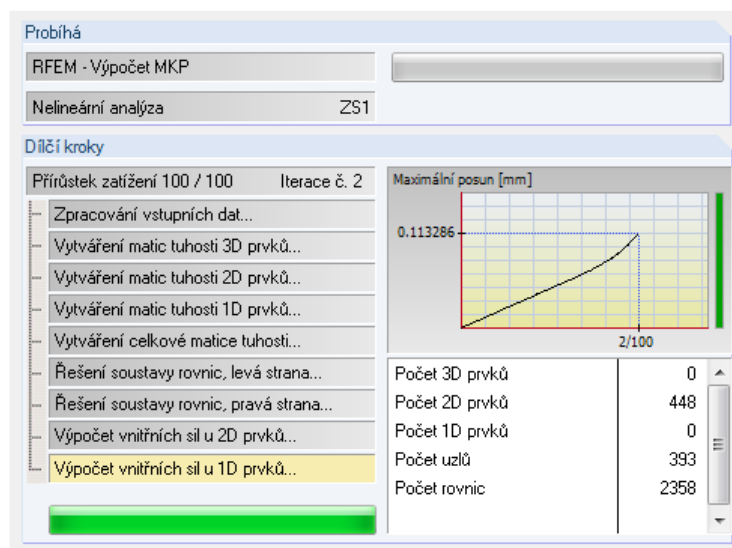


Obrázek 4.2.7.5 Zobrazení průběhu zplastizování.

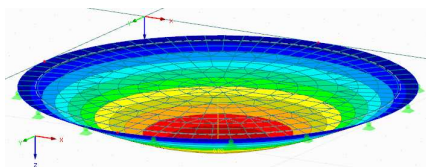
#### 4.2.8 KRUHOVÁ DESKA poloměr 5 m – 1. varianta mechanismu, tloušťka 1 000 mm



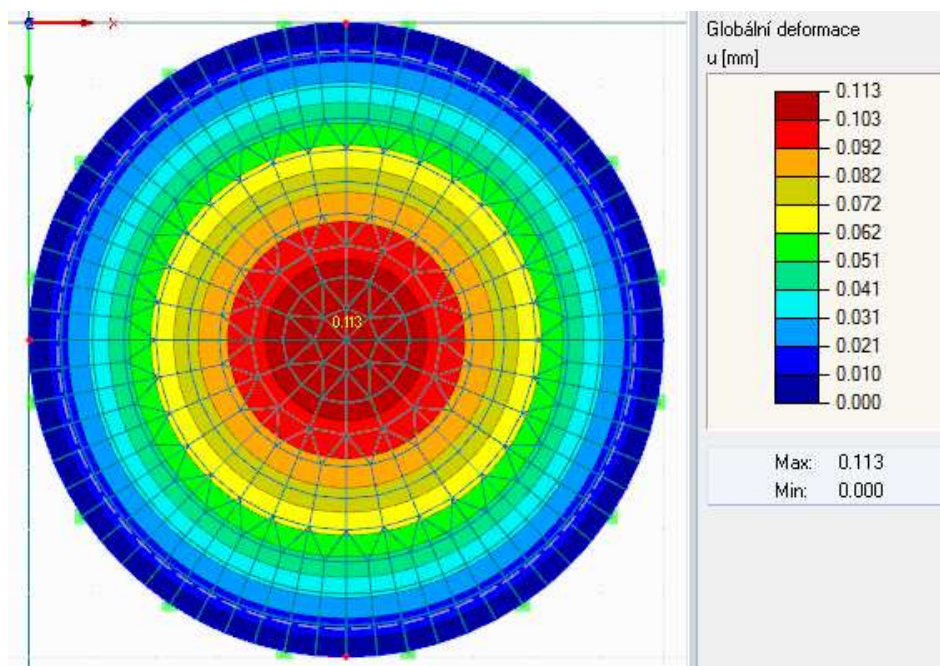
Obrázek 4.2.8.1 Geometrie kruhové desky zatížena uvažovaným plošným mezním zatížením.



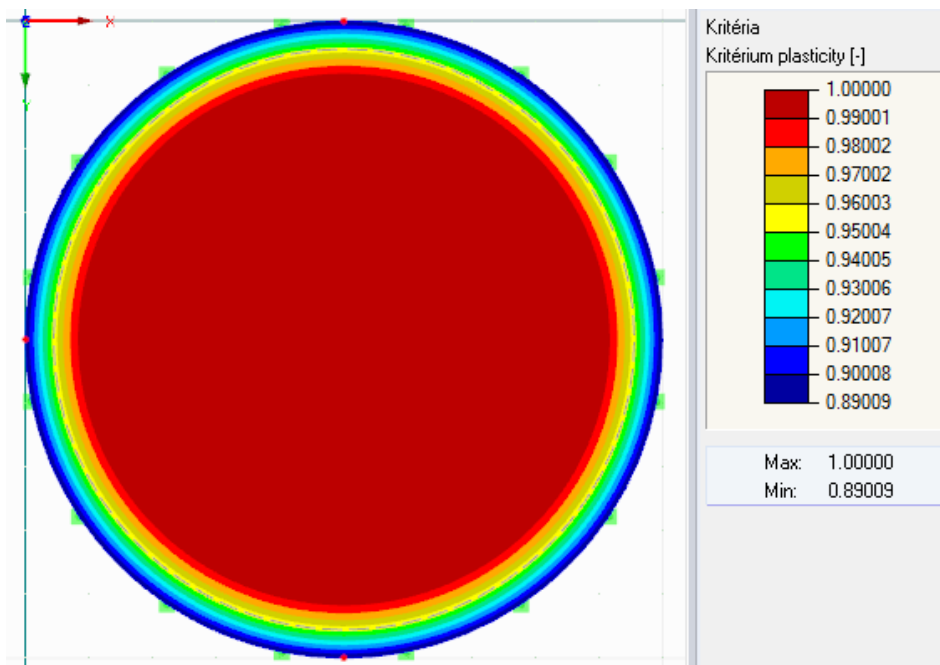
Obrázek 4.2.8.2 Zobrazení grafu průběhu výpočtu – závislost maximálního posunu ve směru osy z a přírůstku zatížení.



Obrázek 4.2.8.3 Výsledná globální deformace – průhyb ve směru osy z. Velikost deformace byla zvětšena násobkem 13000.

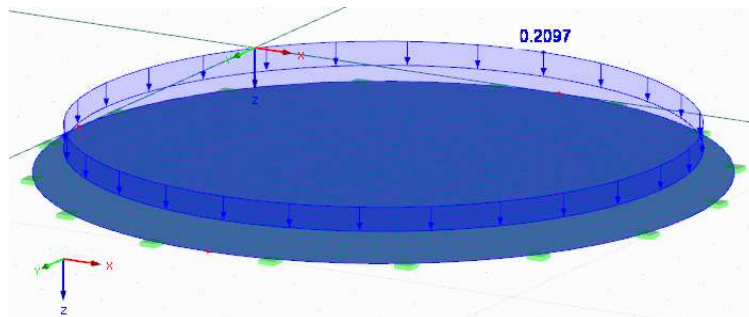


Obrázek 4.2.8.4 Výsledná globální deformace ve směru osy  $z$  a výsledkový panel.

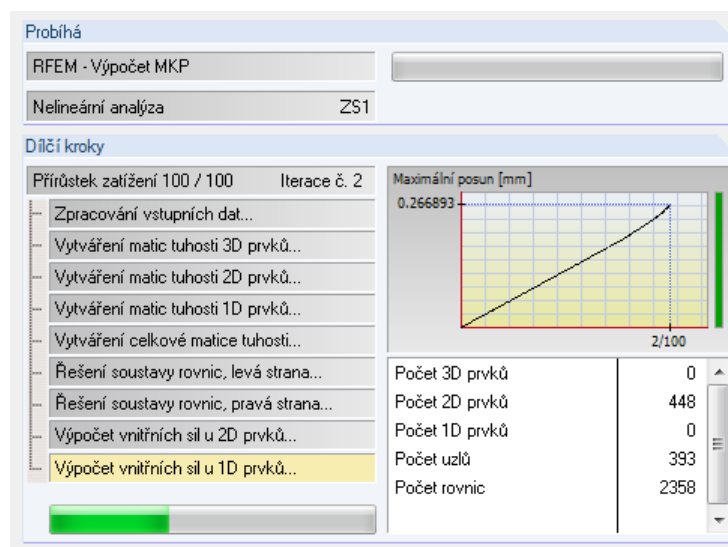


Obrázek 4.2.8.5 Zobrazení průběhu zplastizování.

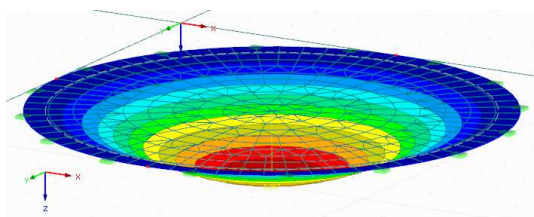
#### 4.2.9 KRUHOVÁ DESKA poloměr 5 m – 2. varianta mechanismu, tloušťka 150 mm



Obrázek 4.2.9.1 Geometrie kruhové desky zatížena uvažovaným plošným mezním zatížením.

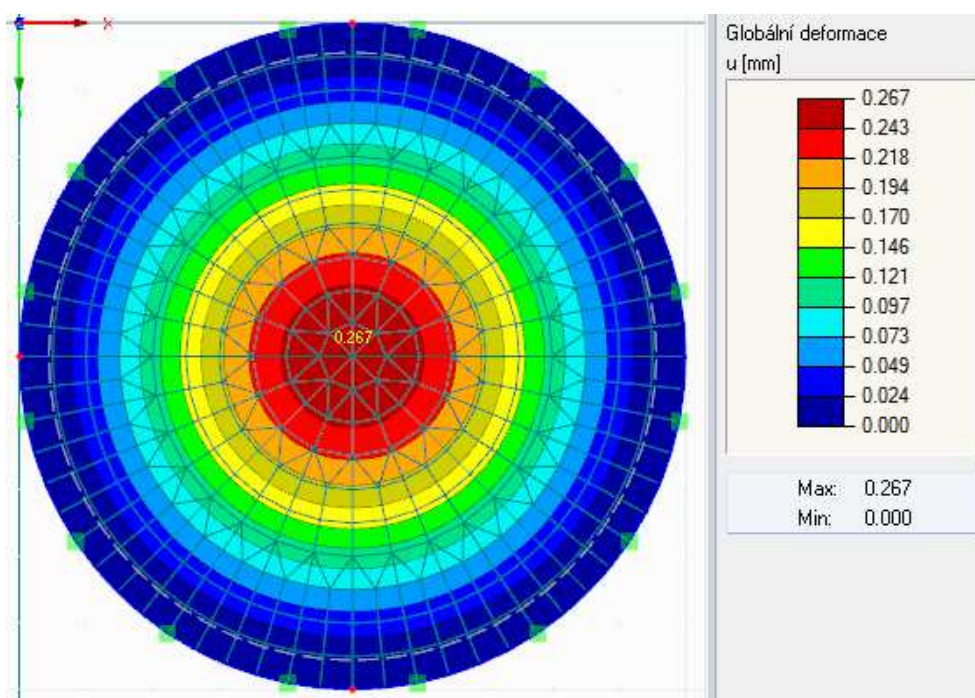


Obrázek 4.2.9.2 Zobrazení grafu průběhu výpočtu – závislost maximálního posunu ve směru osy z a přírůstku zatížení.

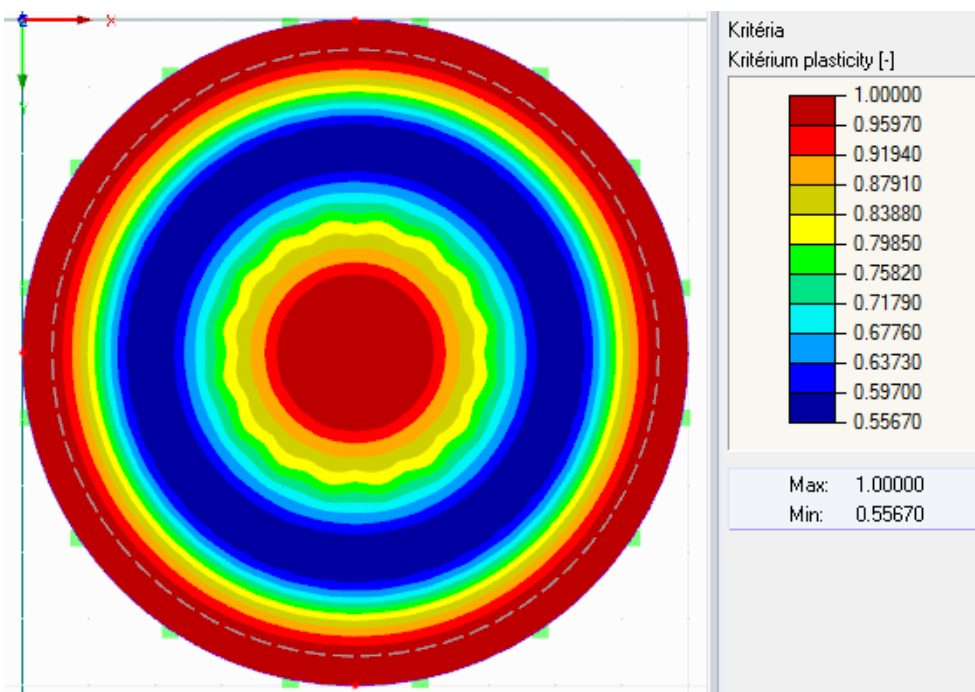


Obrázek 4.2.9.3 Výsledná globální deformace – průhyb ve směru osy z. Velikost deformace byla zvětšena násobkem 5300.



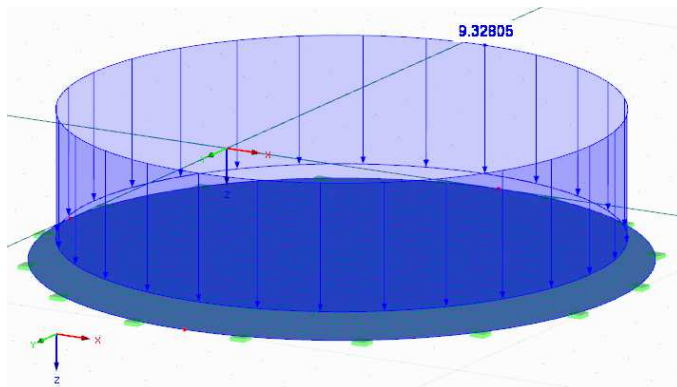


Obrázek 4.2.9.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z a výsledkový panel.

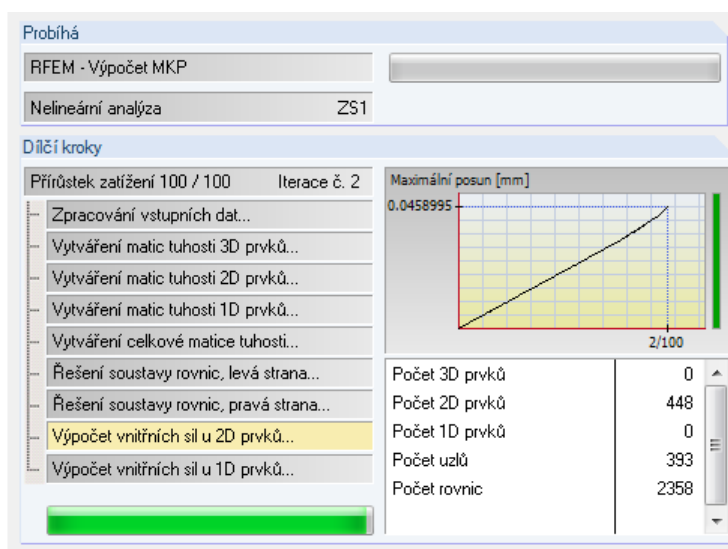


Obrázek 4.2.9.5 Zobrazení průběhu zplastizování.

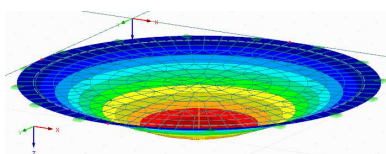
#### 4.2.10 KRUHOVÁ DESKA poloměr 5 m – 2. varianta mechanismu, tloušťka 1 000 mm



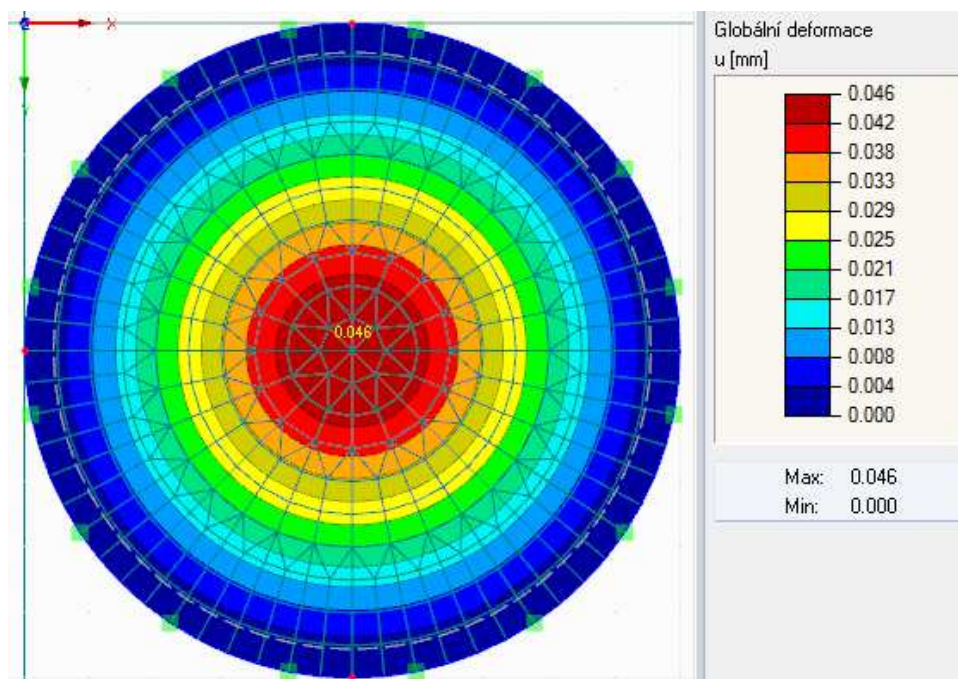
Obrázek 4.2.10.1 Geometrie kruhové desky zatížena uvažovaným plošným mezním zatížením.



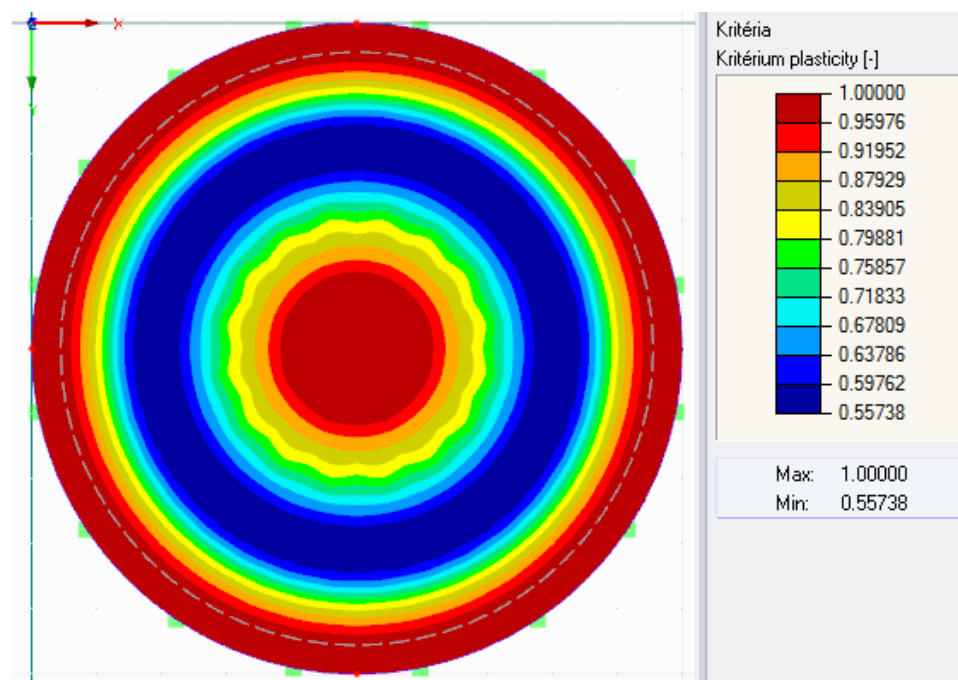
Obrázek 4.2.10.2 Zobrazení grafu průběhu výpočtu – závislost maximálního posunu ve směru osy z a přírůstku zatížení.



Obrázek 4.2.10.3 Výsledná globální deformace – průhyb ve směru osy z. Velikost deformace byla zvětšena násobkem 21000.

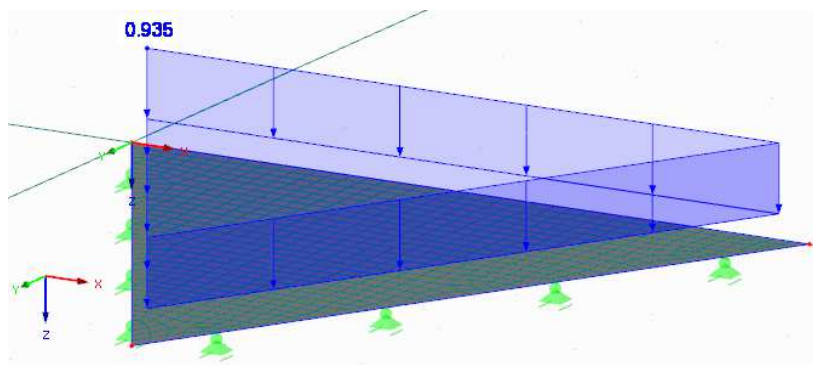


Obrázek 4.2.10.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z a výsledkový panel.

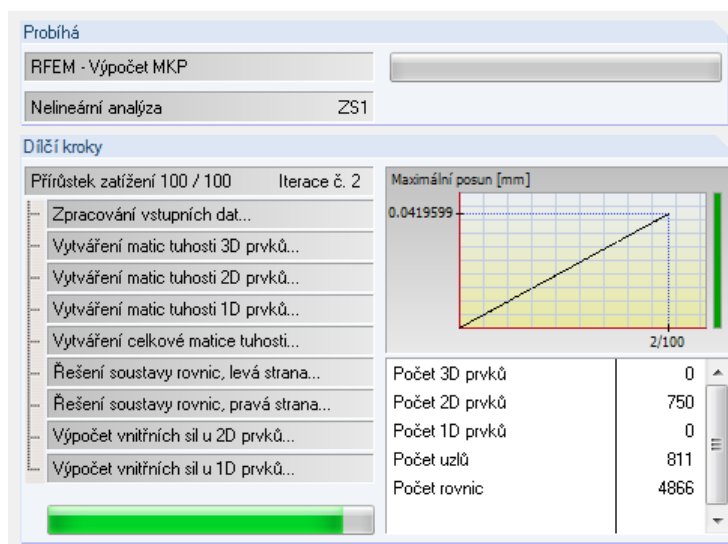


Obrázek 4.2.10.5 Zobrazení průběhu zplastizování.

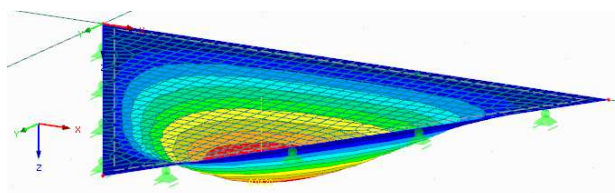
#### 4.2.11 TROJÚHELNÍKOVÁ DESKA strana 5 m, tloušťka 150 mm



Obrázek 4.2.11.1 Geometrie trojúhelníkové desky zatížena uvažovaným plošným mezním zatížením.

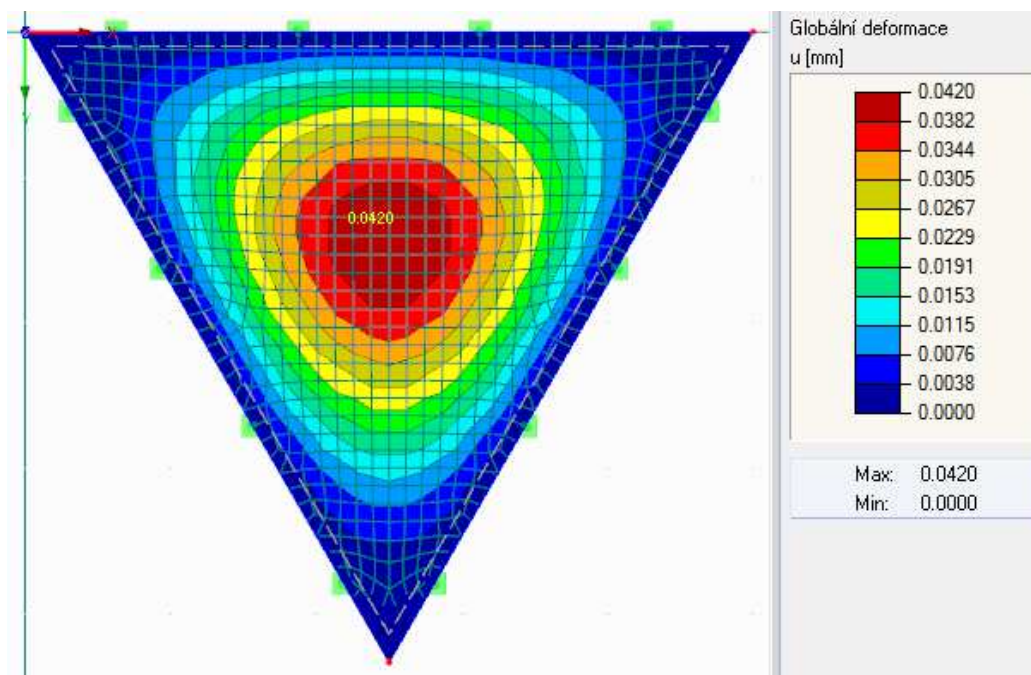


Obrázek 4.2.11.2 Zobrazení grafu průběhu výpočtu – závislost maximálního posunu ve směru osy z a přírůstku zatížení.

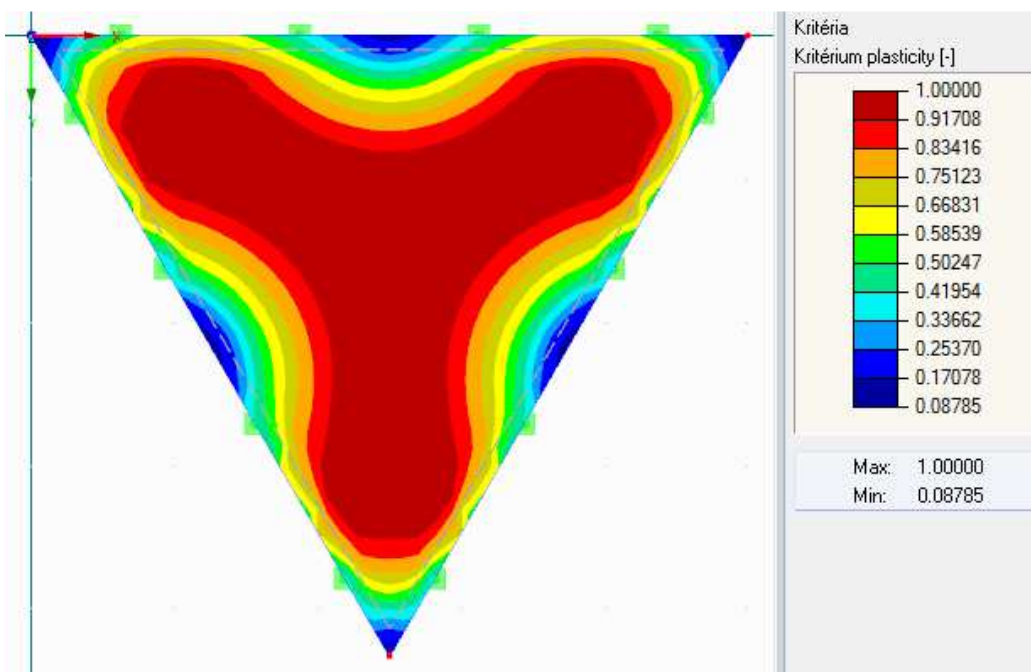


Obrázek 4.2.11.3 Výsledná globální deformace – průhyb ve směru osy z. Velikost deformace byla zvětšena násobkem 16000.



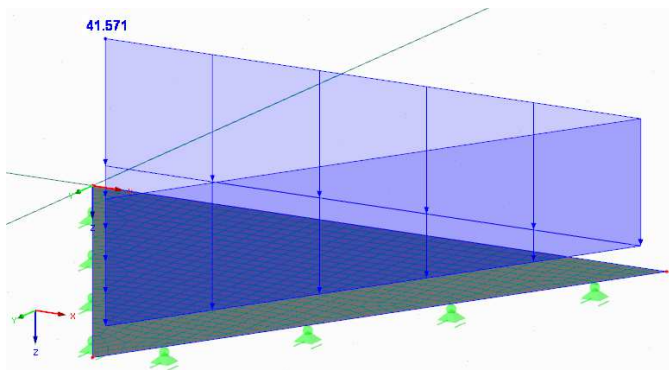


Obrázek 4.2.11.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z a výsledkový panel.

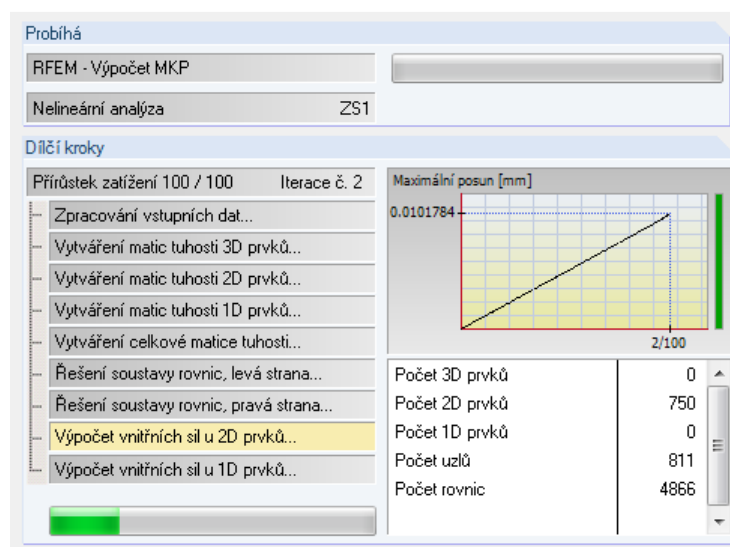


Obrázek 4.2.11.5 Zobrazení průběhu zplastizování.

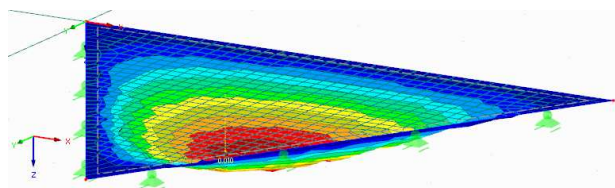
## 4.2.12 TROJÚHELNÍKOVÁ DESKA strana 5 m, tloušťka 1 000 mm



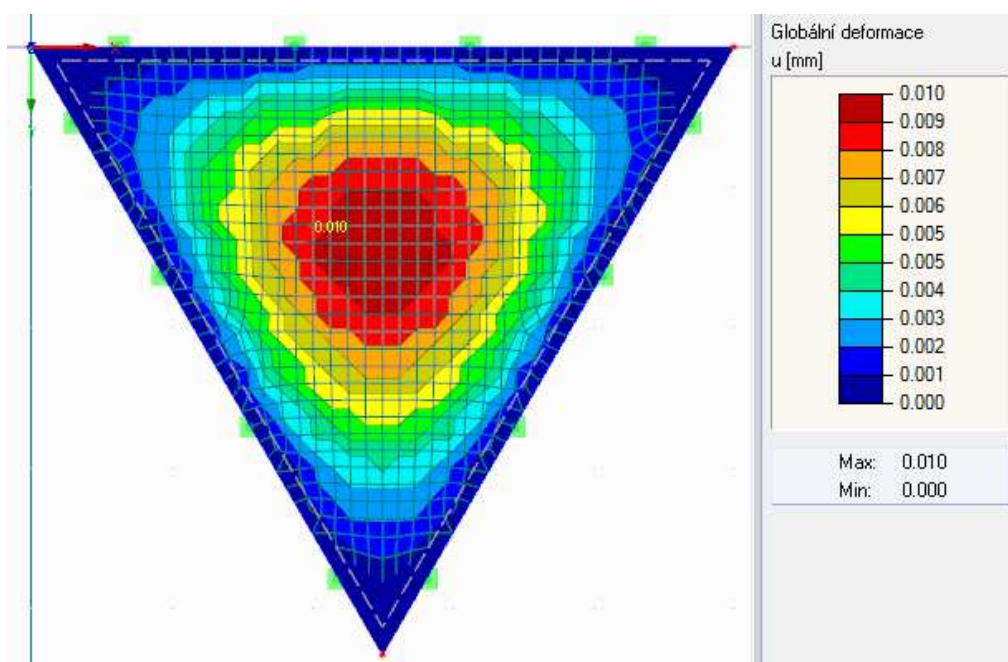
Obrázek 4.2.12.1 Geometrie trojúhelníkové desky zatížena uvažovaným plošným mezním zatížením.



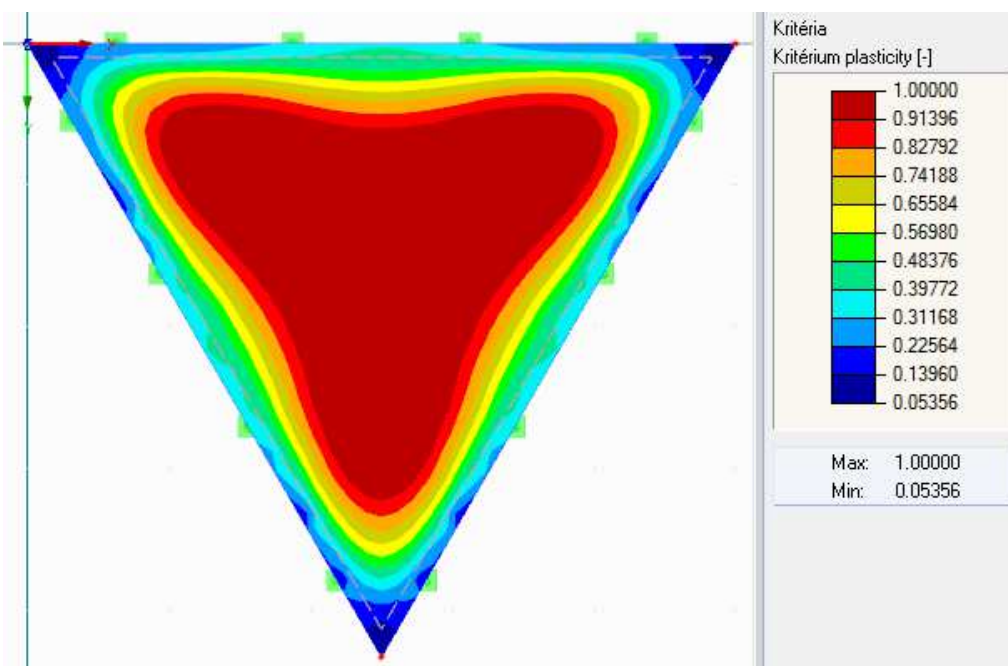
Obrázek 4.2.12.2 Zobrazení grafu průběhu výpočtu – závislost maximálního posunu ve směru osy z a přírůstku zatížení.



Obrázek 4.2.12.3 Výsledná globální deformace – průhyb ve směru osy z. Velikost deformace byla zvětšena násobkem 50000.

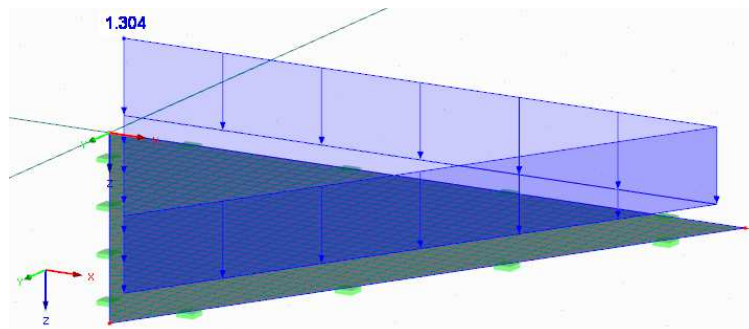


Obrázek 4.2.12.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z a výsledkový panel.

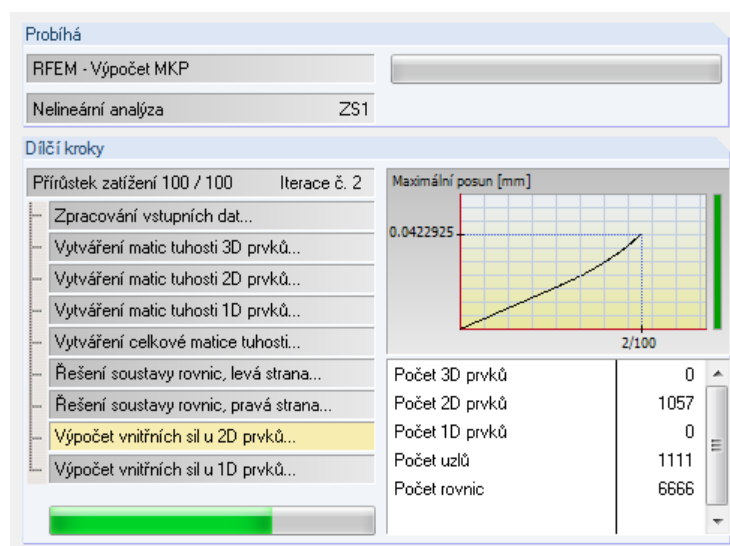


Obrázek 4.2.12.5 Zobrazení průběhu zplastizování.

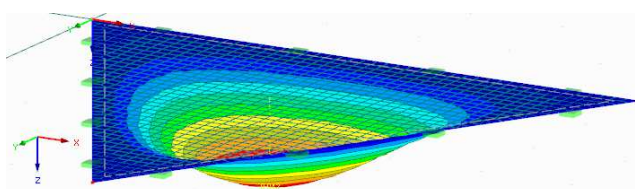
#### 4.2.13 TROJÚHELNÍKOVÁ DESKA strana 7 m, tloušťka 150 mm



Obrázek 4.2.13.1 Geometrie trojúhelníkové desky zatížena uvažovaným plošným mezním zatížením.

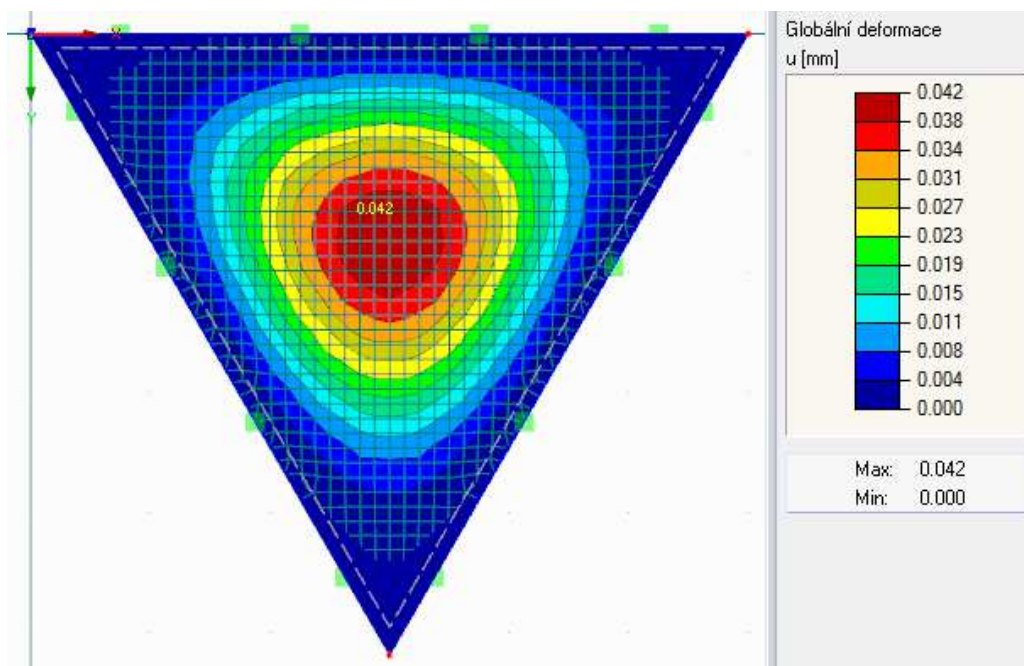


Obrázek 4.2.13.2 Zobrazení grafu průběhu výpočtu – závislost maximálního posunu ve směru osy z a přírůstku zatížení.

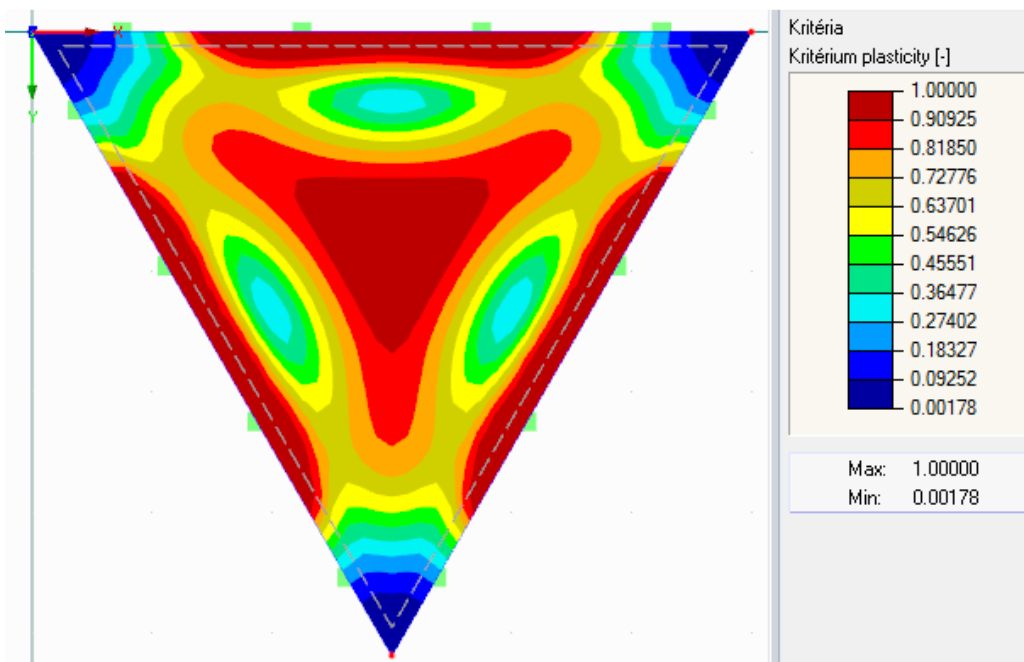


Obrázek 4.2.13.3 Výsledná globální deformace – průhyb ve směru osy z. Velikost deformace byla zvětšena násobkem 19000.



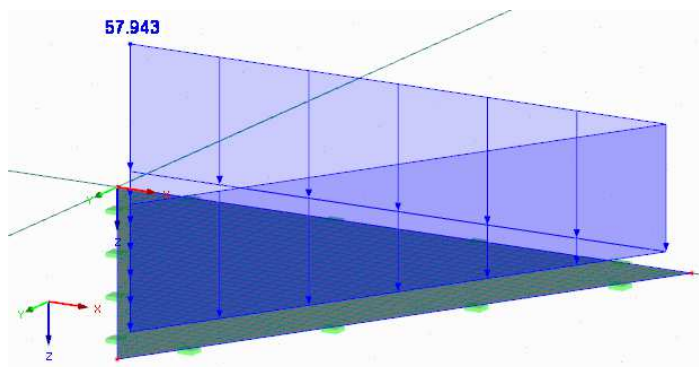


Obrázek 4.2.13.4 Výsledná globální deformace ve směru osy  $z$  a výsledkový panel.

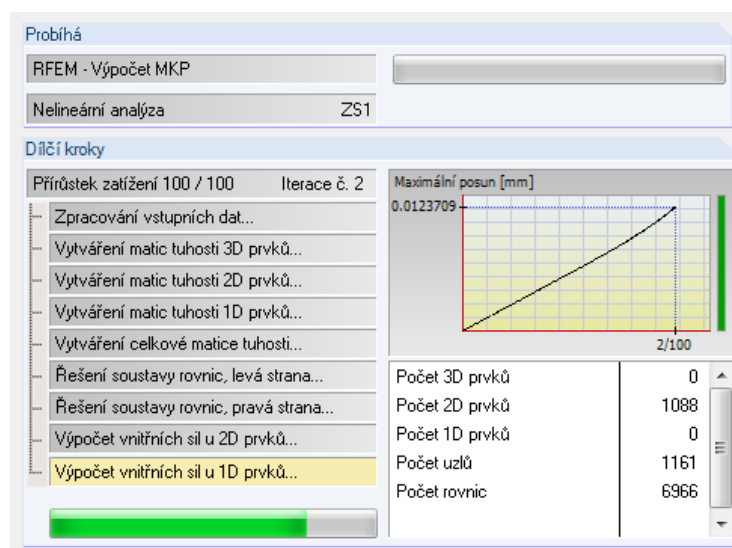


Obrázek 4.2.13.5 Zobrazení průběhu zplastizování.

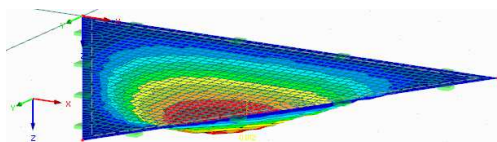
#### 4.2.14 TROJÚHELNÍKOVÁ DESKA strana 7 m, tloušťka 1 000 mm



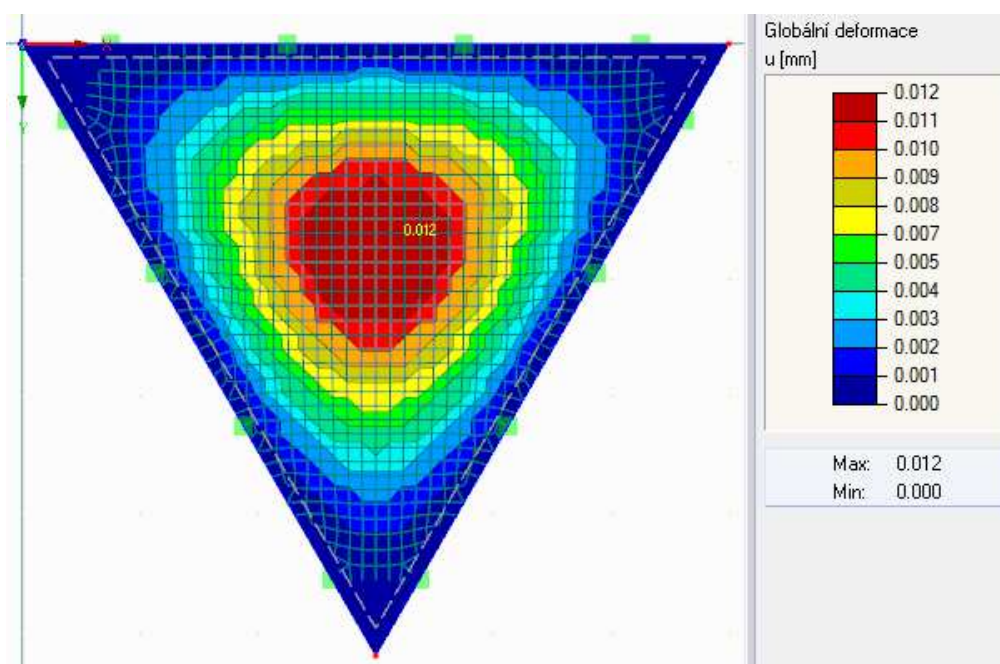
Obrázek 4.2.14.1 Geometrie trojúhelníkové desky zatížena uvažovaným plošným mezním zatížením.



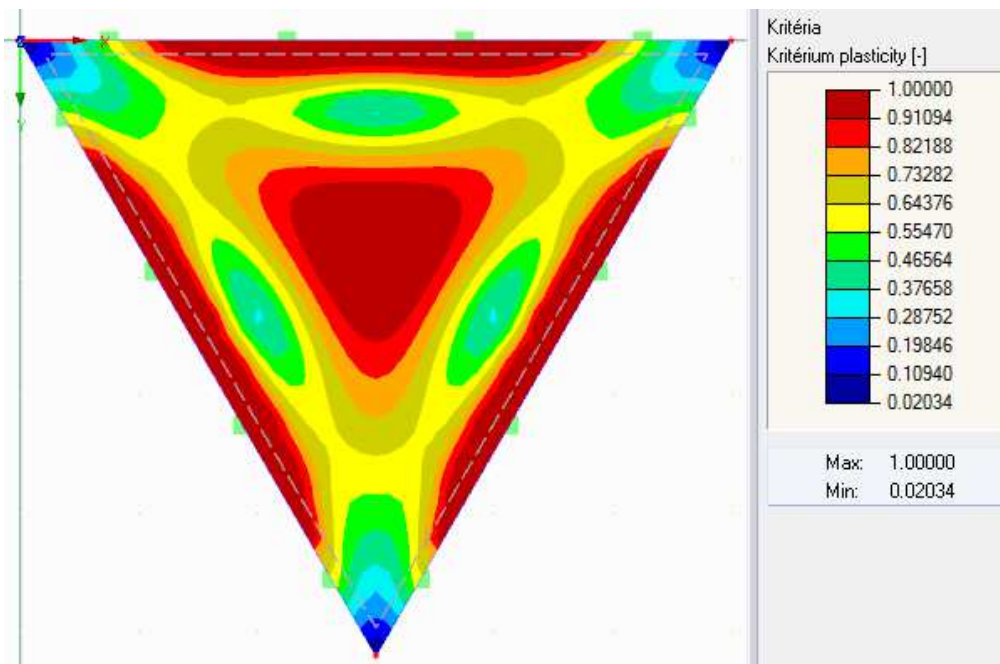
Obrázek 4.2.14.2 Zobrazení grafu průběhu výpočtu – závislost maximálního posunu ve směru osy z a přírůstku zatížení.



Obrázek 4.2.14.3 Výsledná globální deformace – průhyb ve směru osy z. Velikost deformace byla zvětšena násobkem 50000.

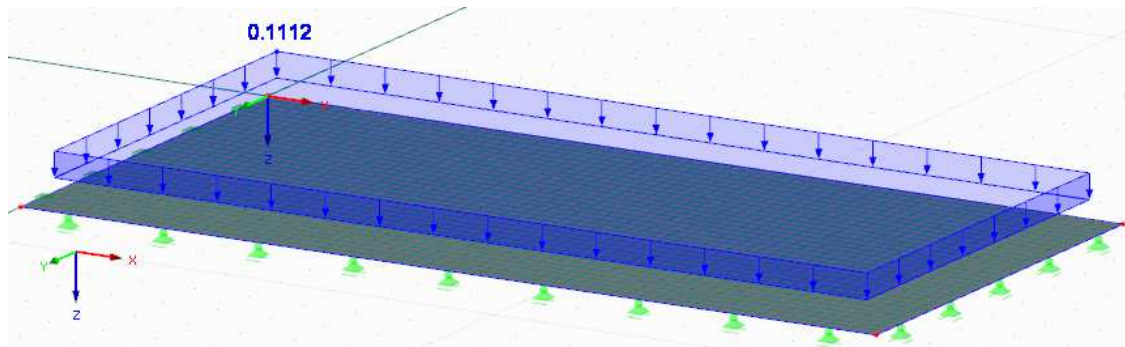


Obrázek 4.2.14.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z a výsledkový panel.

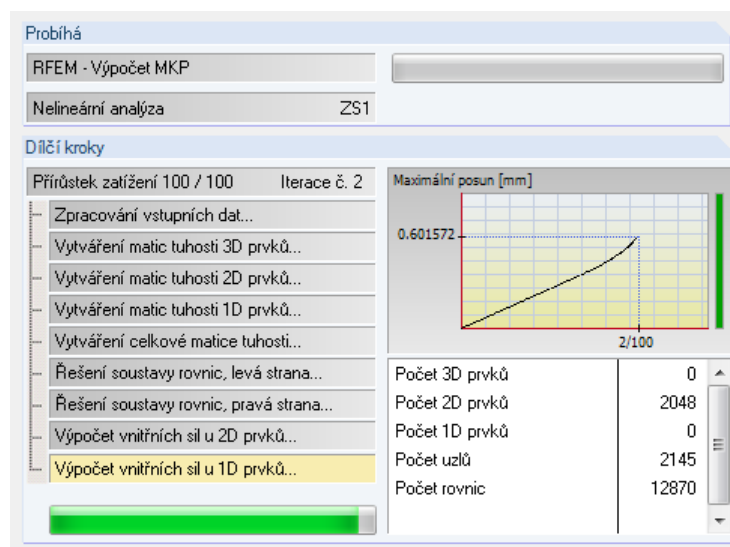


Obrázek 4.2.14.5 Zobrazení průběhu zplastizování.

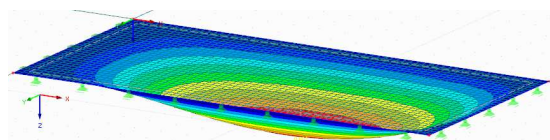
#### 4.2.15 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 16 x 8 m, nesymetricky uložená, tloušťka 150 mm



Obrázek 4.2.15.1 Geometrie obdélníkové desky zatížena uvažovaným plošným mezním zatížením.

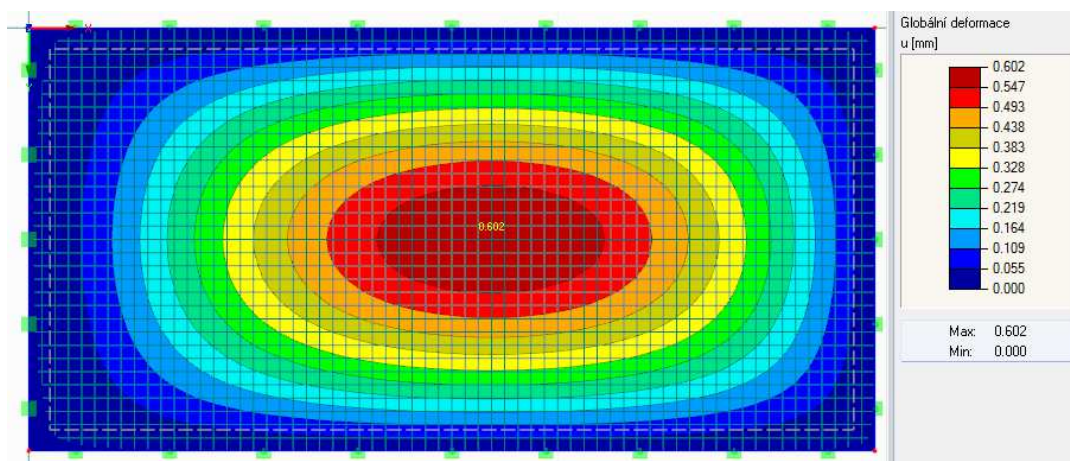


Obrázek 4.2.15.2 Zobrazení grafu průběhu výpočtu – závislost maximálního posunu ve směru osy z a přírůstku zatížení.

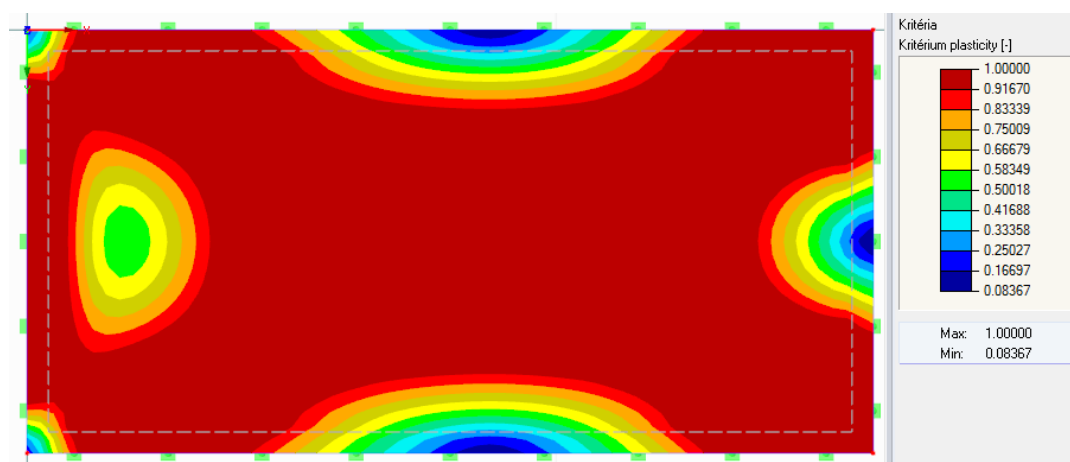


Obrázek 4.2.15.3 Výsledná globální deformace – průhyb ve směru osy z. Velikost deformace byla zvětšena násobkem 3000.



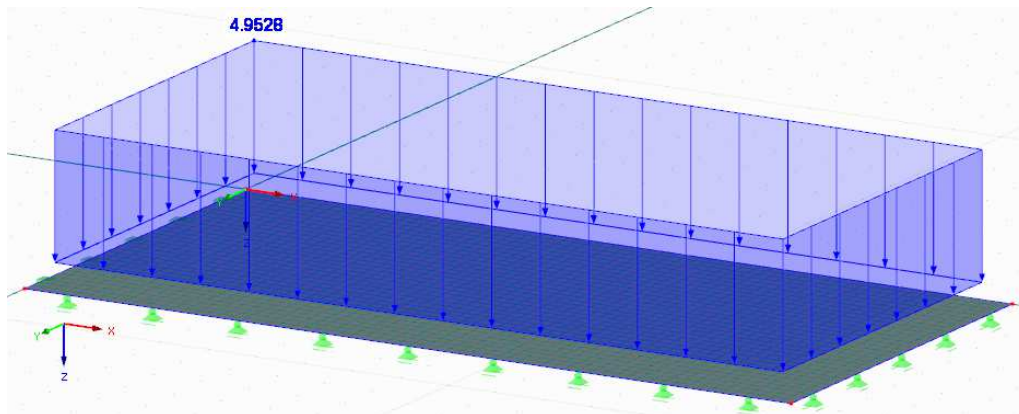


Obrázek 4.2.15.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z a výsledkový panel.

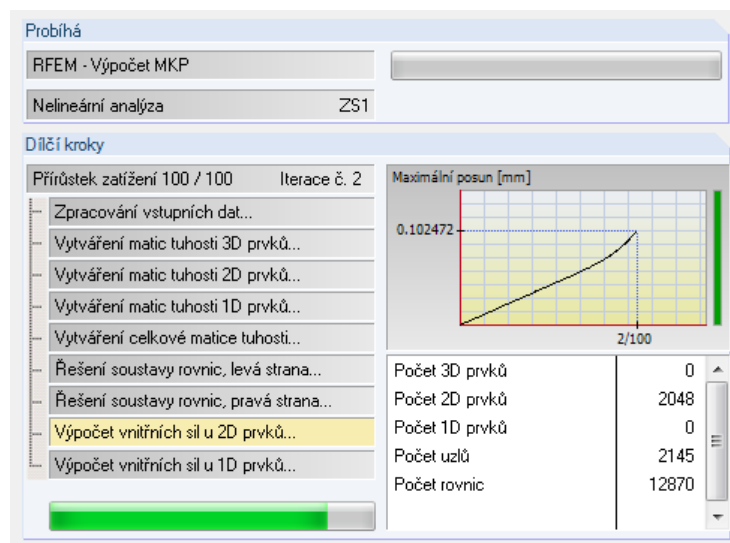


Obrázek 4.2.15.5 Zobrazení průběhu zplastizování.

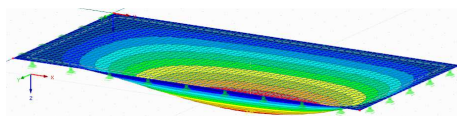
#### 4.2.16 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 16 x 8 m, nesymetricky uložená, tloušťka 1 000 mm



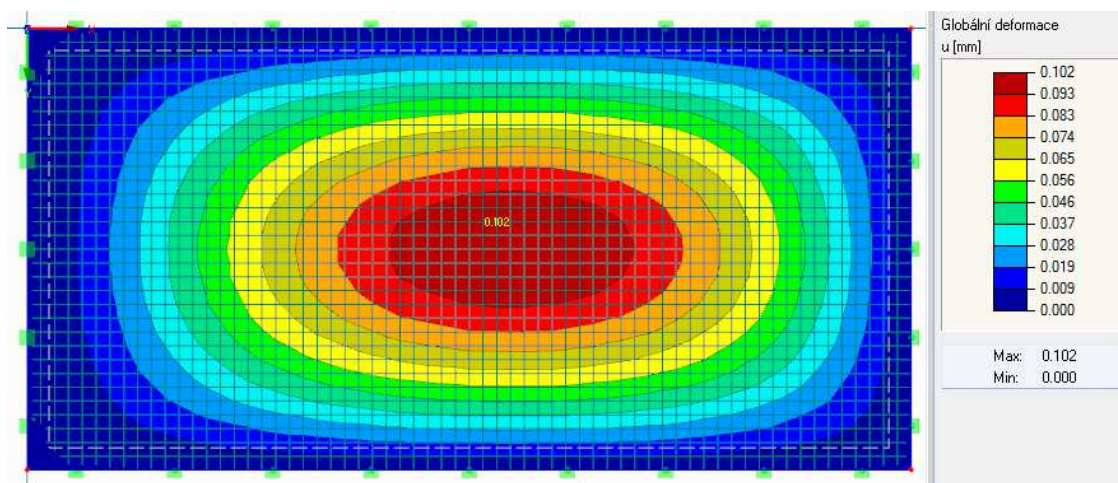
Obrázek 4.2.16.1 Geometrie obdélníkové desky zatížena uvažovaným plošným mezním zatížením.



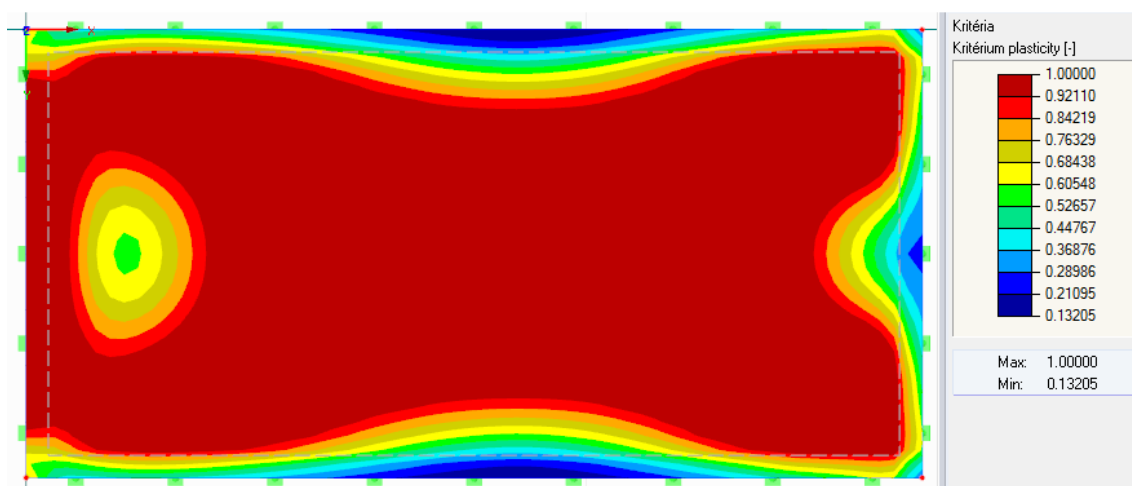
Obrázek 4.2.16.2 Zobrazení grafu průběhu výpočtu – závislost maximálního posunu ve směru osy z a přírůstku zatížení.



Obrázek 4.2.16.3 Výsledná globální deformace – průhyb ve směru osy z. Velikost deformace byla zvětšena násobkem 18000.

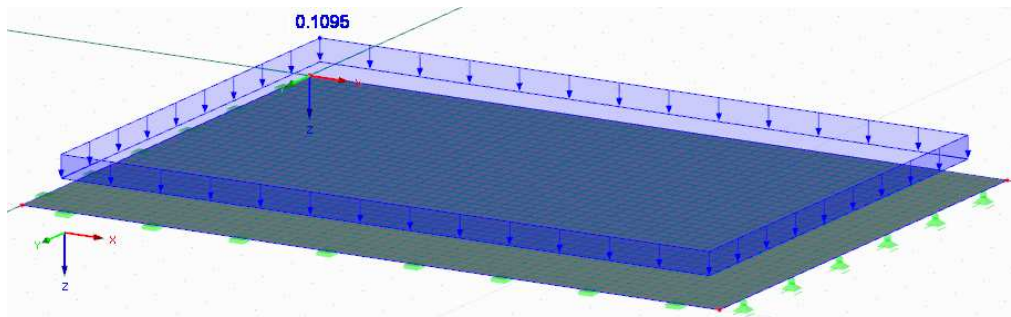


Obrázek 4.2.16.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z a výsledkový panel.

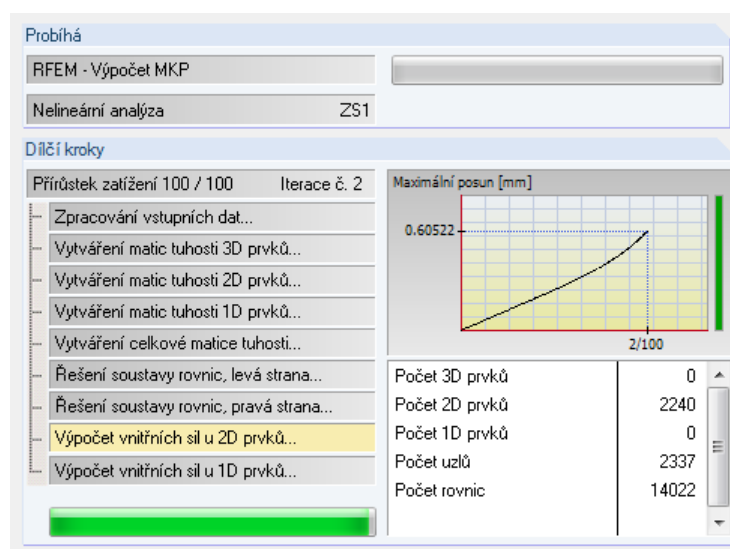


Obrázek 4.2.16.5 Zobrazení průběhu zplastizování.

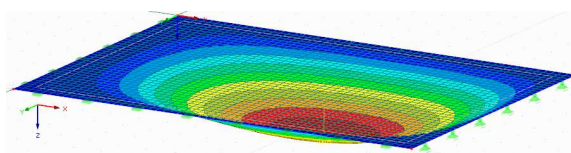
#### 4.2.17 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 14 x 10 m, nesymetricky uložená, tloušťka 150 mm



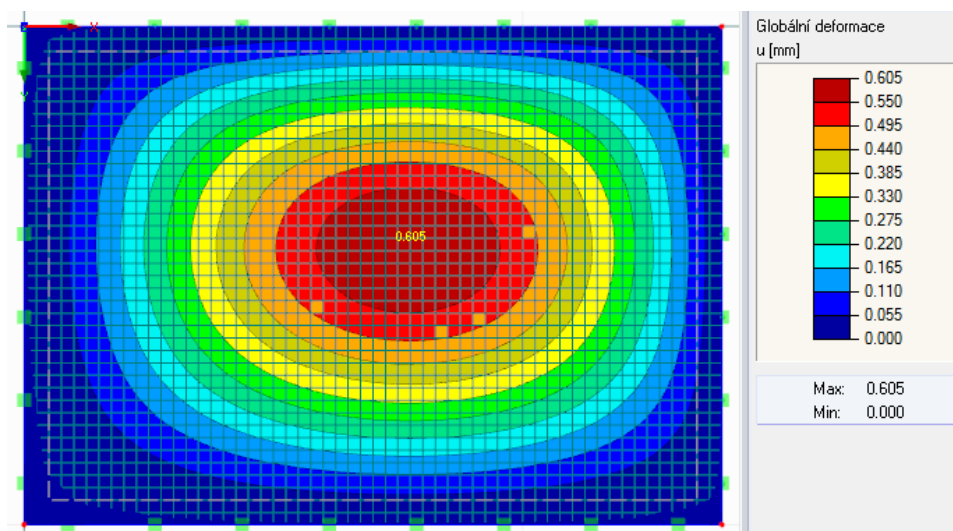
Obrázek 4.2.17.1 Geometrie obdélníkové desky zatížena uvažovaným plošným mezním zatížením.



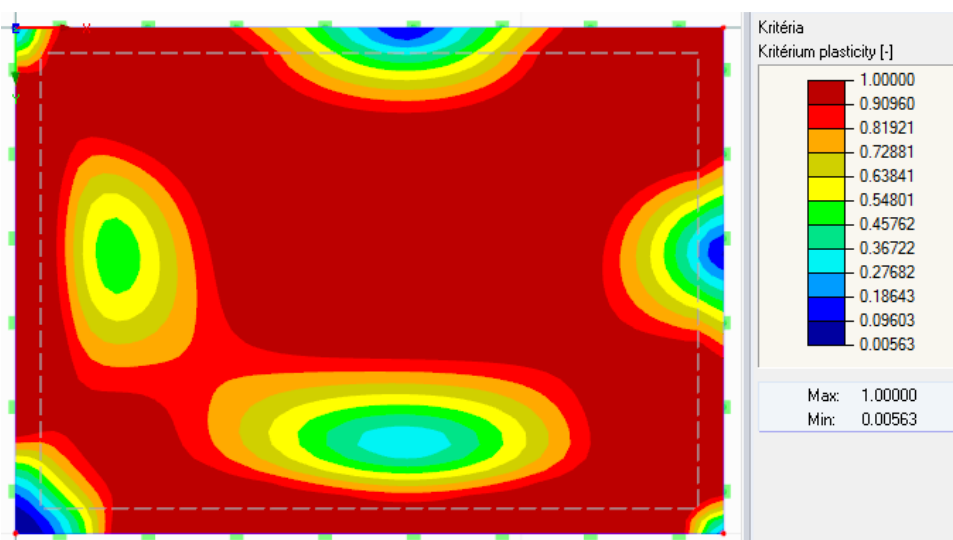
Obrázek 4.2.17.2 Zobrazení grafu průběhu výpočtu – závislost maximálního posunu ve směru osy z a přírůstku zatížení.



Obrázek 4.2.17.3 Výsledná globální deformace – průhyb ve směru osy z. Velikost deformace byla zvětšena násobkem 2800.



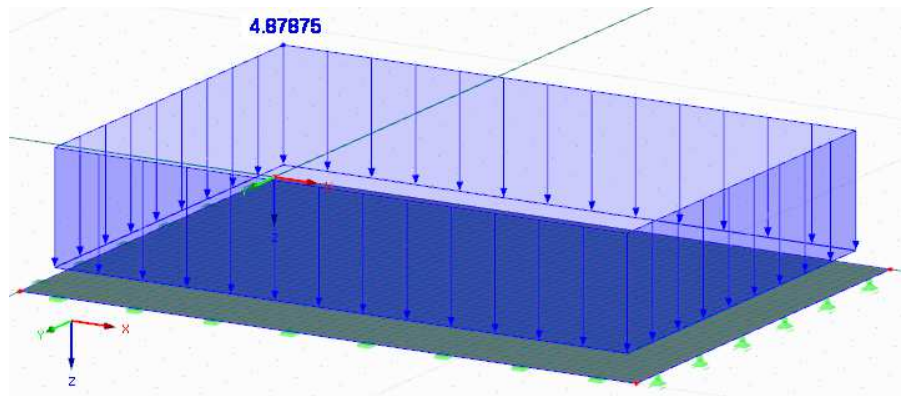
Obrázek 4.2.17.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z a výsledkový panel.



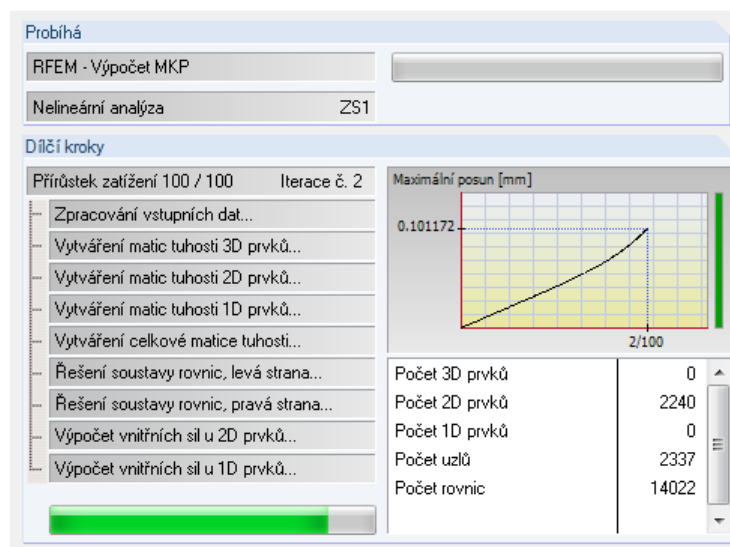
Obrázek 4.2.17.5 Zobrazení průběhu zplastizování.



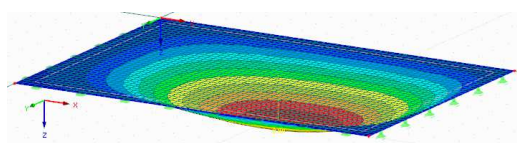
#### 4.2.18 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 14 x 10 m, nesymetricky uložená, tloušťka 1 000 mm



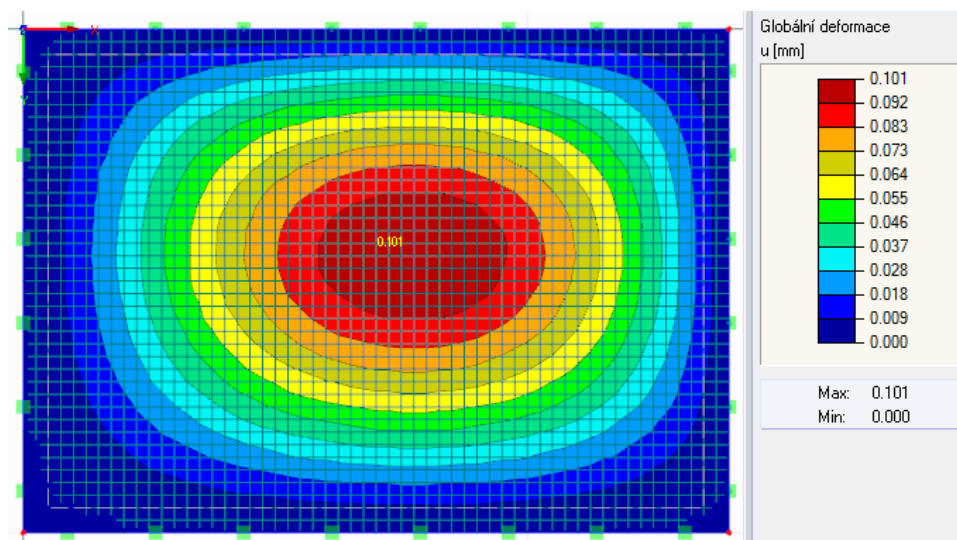
Obrázek 4.2.18.1 Geometrie obdélníkové desky zatížena uvažovaným plošným mezním zatížením.



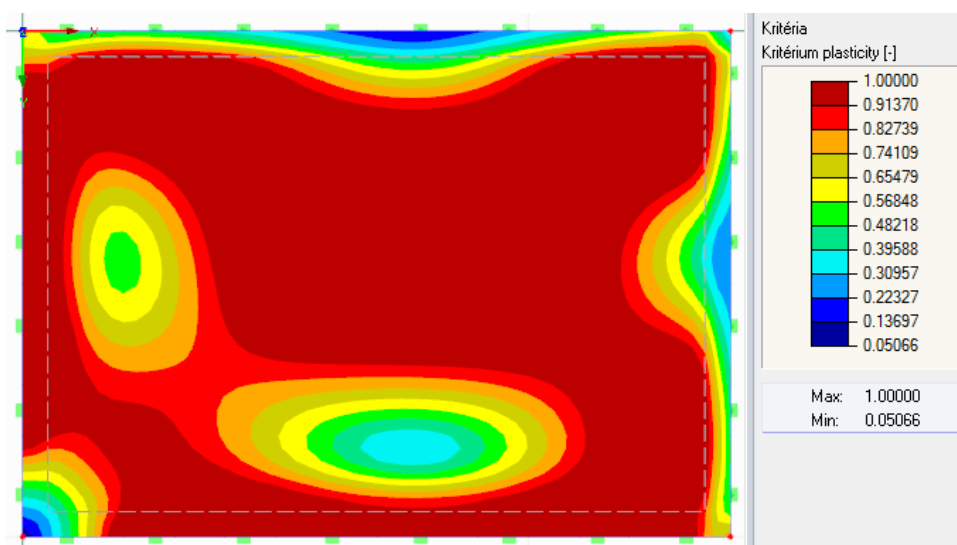
Obrázek 4.2.18.2 Zobrazení grafu průběhu výpočtu – závislost maximálního posunu ve směru osy z a přírůstku zatížení.



Obrázek 4.2.18.3 Výsledná globální deformace – průhyb ve směru osy z. Velikost deformace byla zvětšena násobkem 17000.



Obrázek 4.2.18.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z a výsledkový panel.

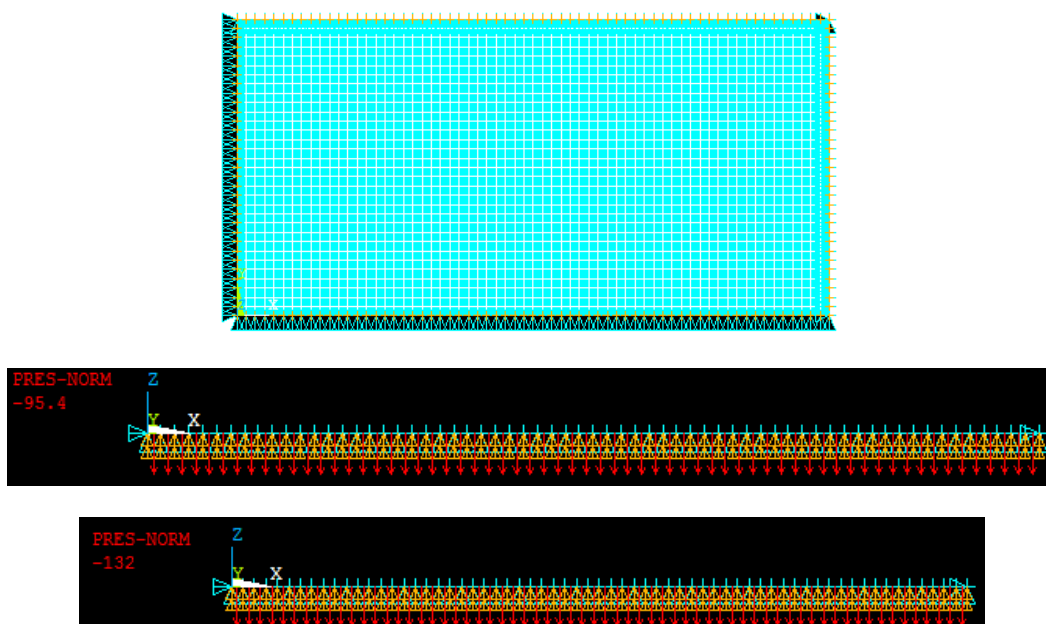


Obrázek 4.2.18.5 Zobrazení průběhu zplastizování.

## 4.3 ŘEŠENÍ V PROGRAMU ANSYS

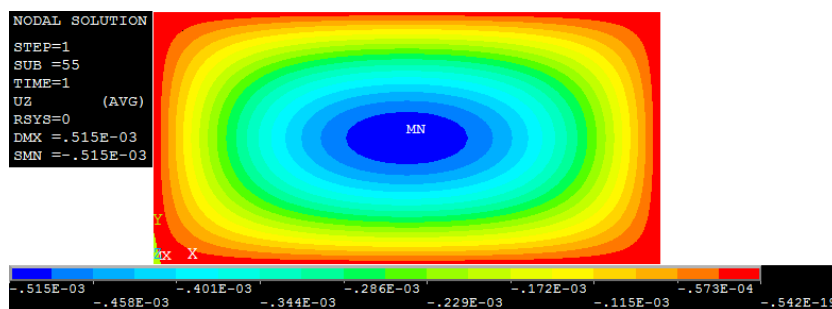
Modely řešené v programu ANSYS odpovídají geometrií a okrajovými podmínkami jak ručnímu řešení, tak řešení v programu RFEM. Každá deska je opět řešena pro dvě tloušťky, 150 mm a 1 000 mm. Výpočet byl proveden pro dvě různá plná plošná zatížení. První řešení je pro zatížení odpovídajícímu zatížení uvažovanému v programu RFEM. Druhý výpočet byl proveden pro upravené zatížení určené pro program ANSYS. Úprava zatížení spočívala ve snížení nebo zvýšení hodnoty tak, aby došlo k vytvoření plastických kloubů v takovém rozsahu, který odpovídá kinematice kolapsu desky a zároveň se blíží rozsahu zplastizování, které bylo získáno programem ANSYS. Lze tedy porovnat, jak se deska chová pro danou hodnotu zatížení a jaké zatížení je nutné aplikovat, aby byl získán požadovaný výsledek.

### 4.3.1 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 16 x 8 m, tloušťka 150 mm

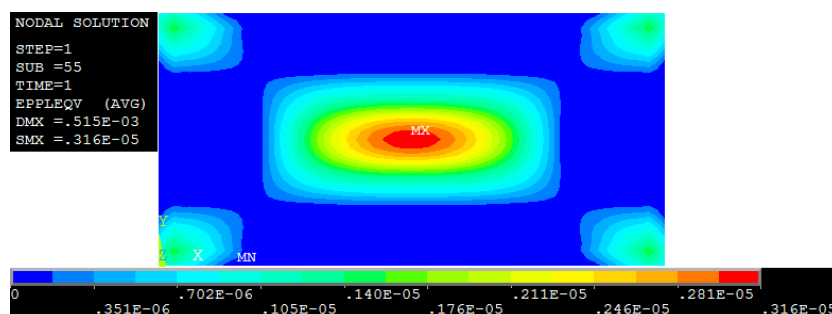


Obrázek 4.3.1.1 Geometrie obdélníkové desky a řešené hodnoty zatížení. První hodnota zatížení odpovídá zatížení v programu RFEM, druhá hodnota je upravená pro program ANSYS.

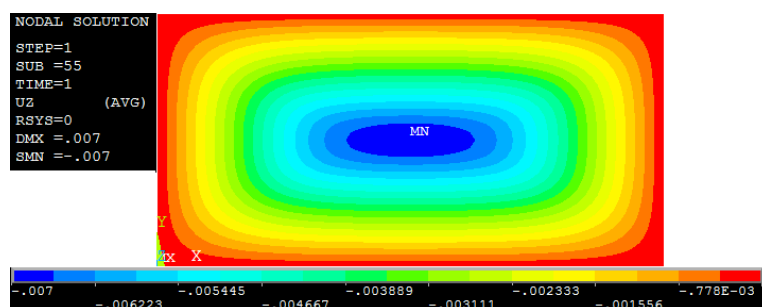




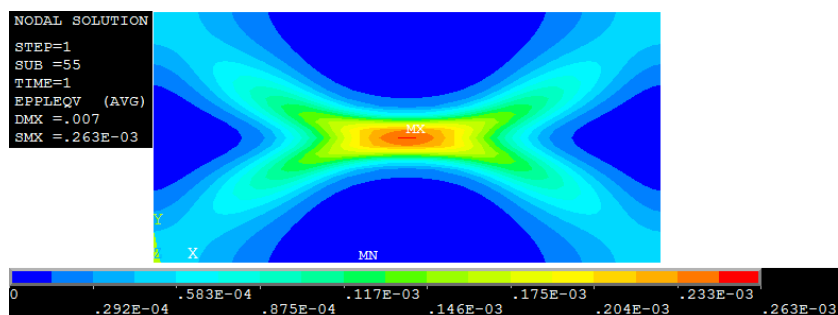
Obrázek 4.3.1.2 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.



Obrázek 4.3.1.3 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.

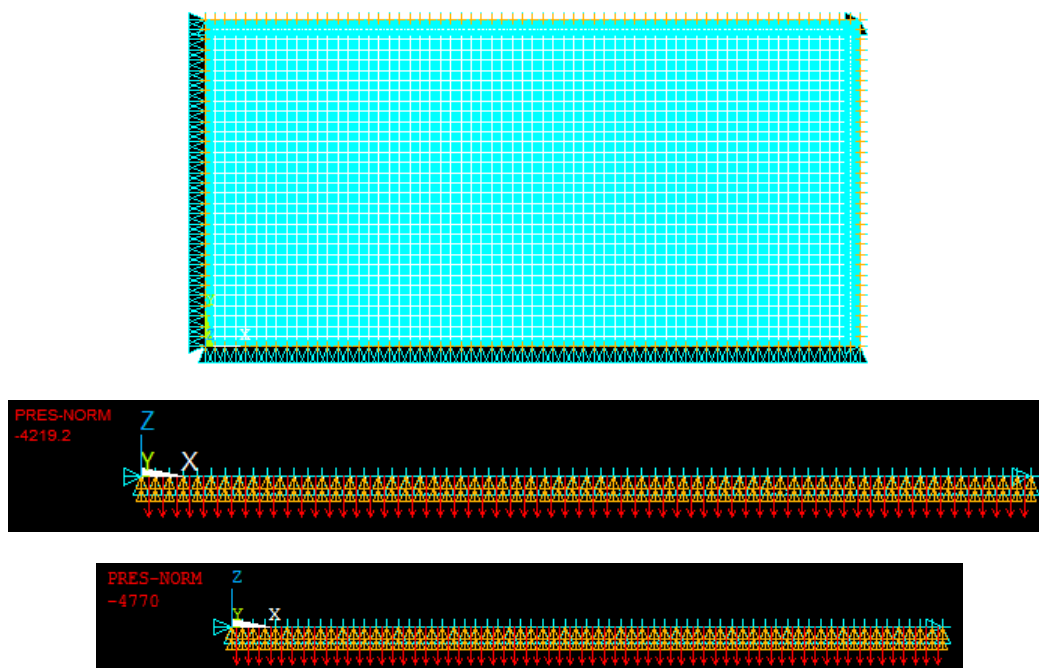


Obrázek 4.3.1.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

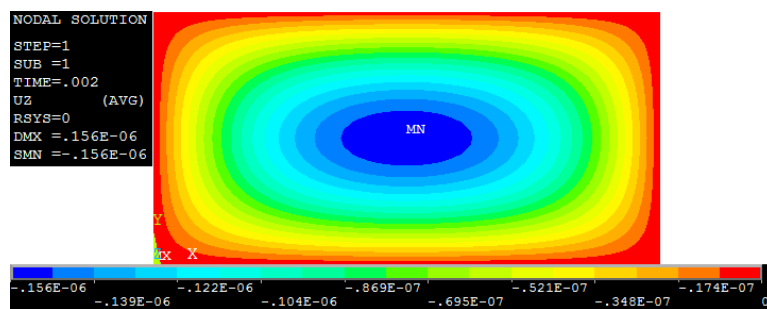


Obrázek 4.3.1.5 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

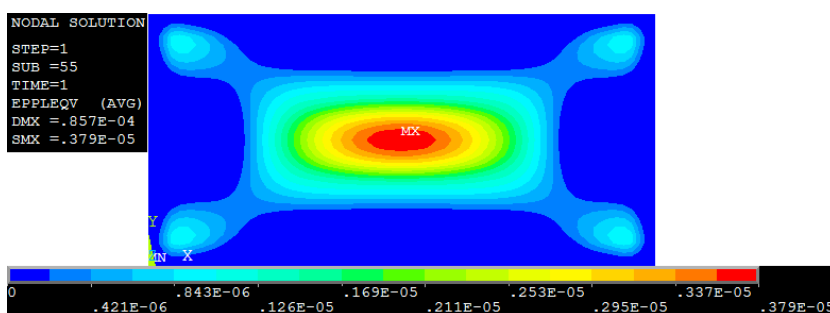
#### 4.3.2 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 16 x 8 m, tloušťka 1 000 mm



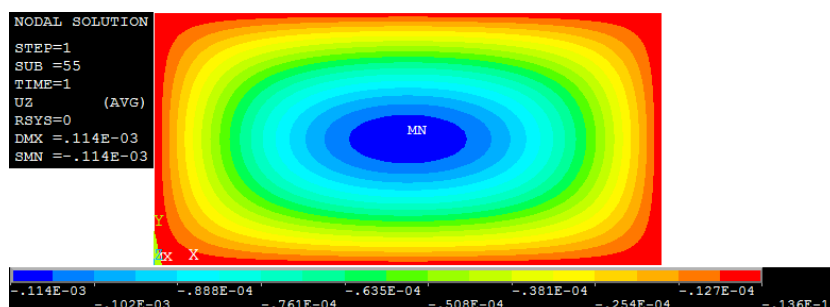
Obrázek 4.3.2.1 Geometrie obdélníkové desky a řešené hodnoty zatížení. První hodnota zatížení odpovídá zatížení v programu RFEM, druhá hodnota je upravená pro program ANSYS.



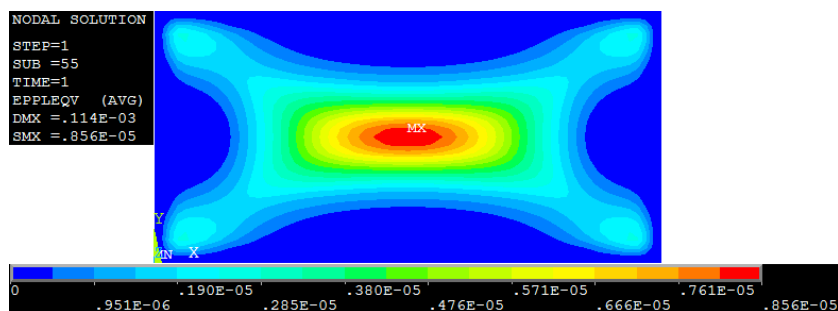
Obrázek 4.3.2.2 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.



Obrázek 4.3.2.3 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.

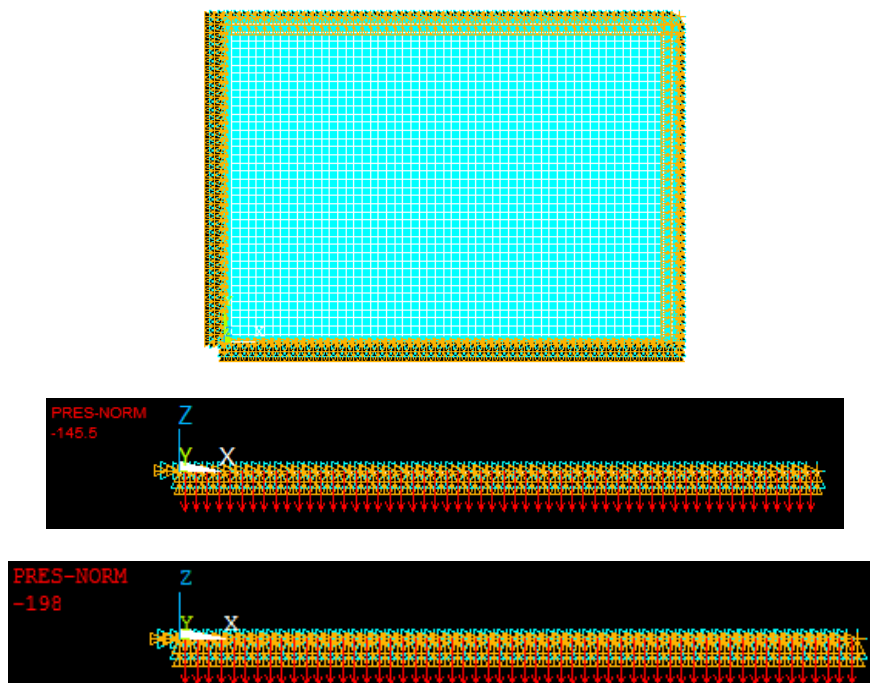


Obrázek 4.3.2.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

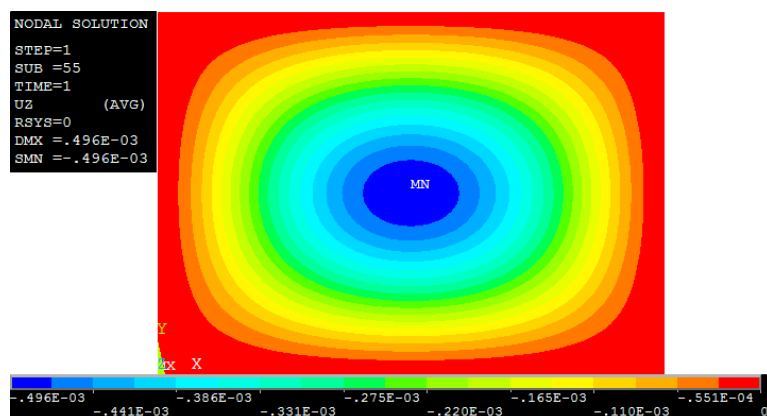


Obrázek 4.3.2.5 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

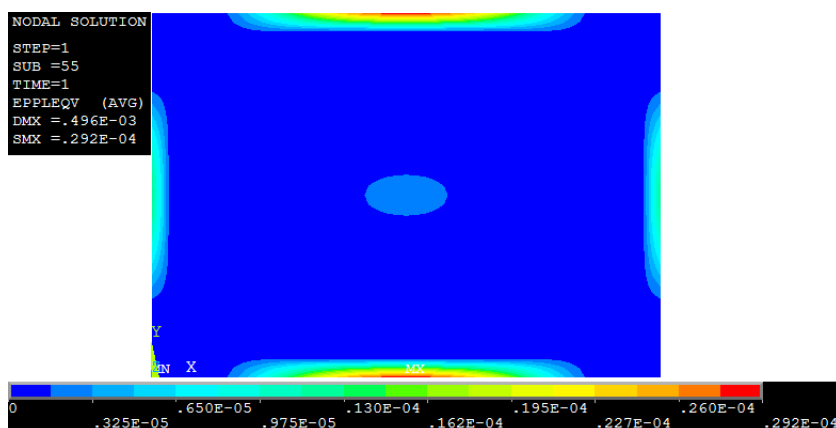
### 4.3.3 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 14 x 10 m, tloušťka 150 mm



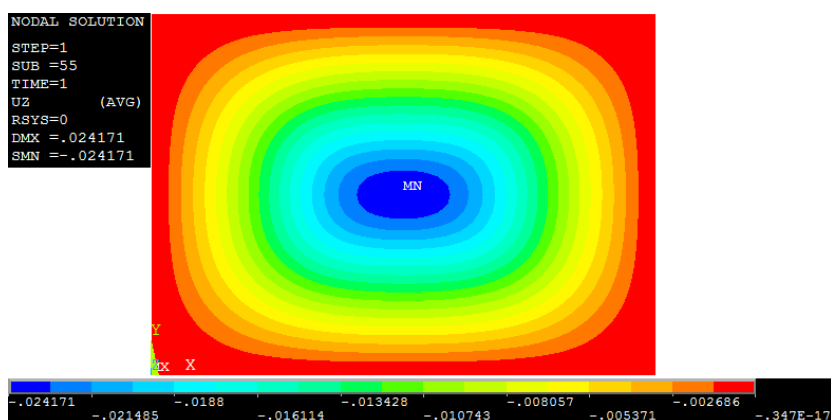
Obrázek 4.3.3.1 Geometrie obdélníkové desky a řešené hodnoty zatížení. První hodnota zatížení odpovídá zatížení v programu RFEM, druhá hodnota je upravená pro program ANSYS.



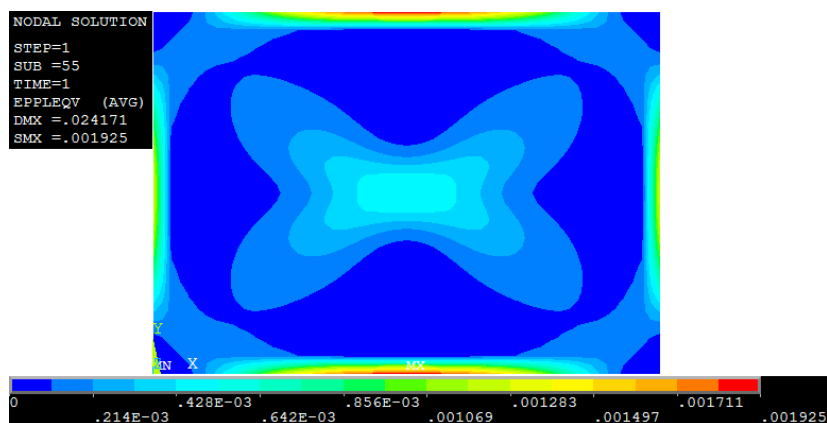
Obrázek 4.3.3.2 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.



Obrázek 4.3.3.3 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.

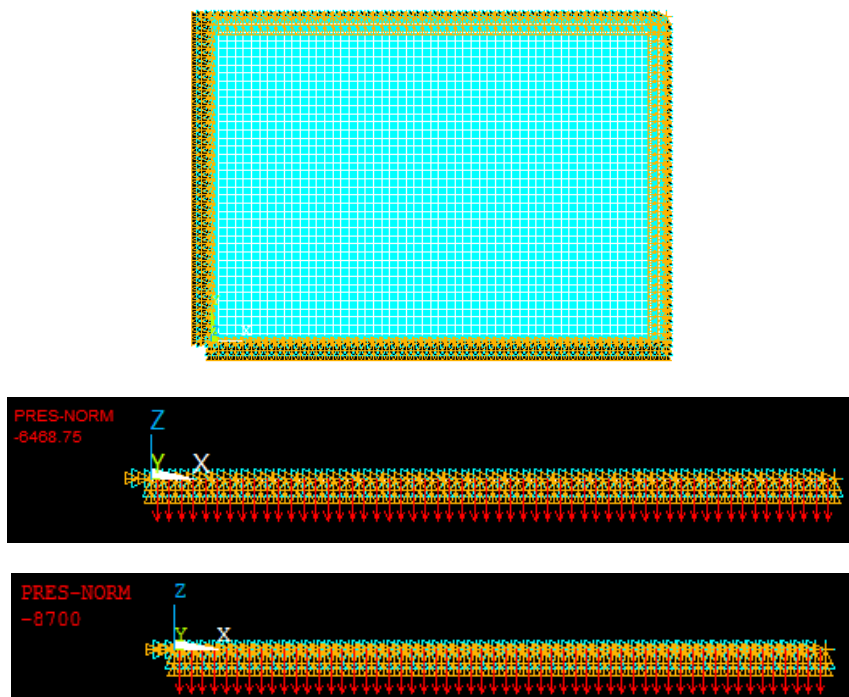


Obrázek 4.3.3.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

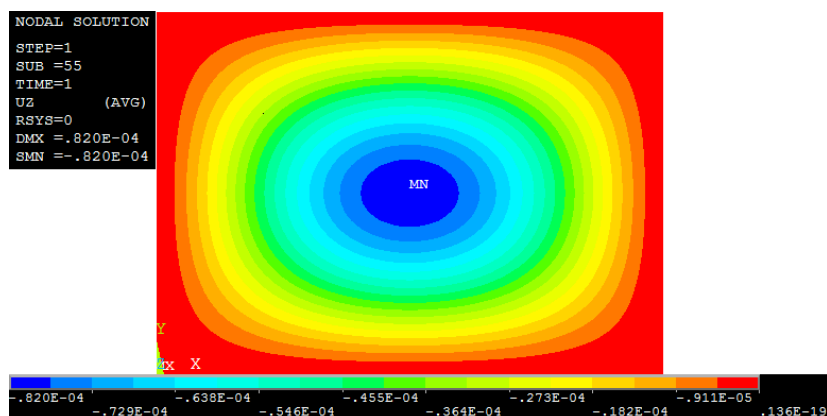


Obrázek 4.3.3.5 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

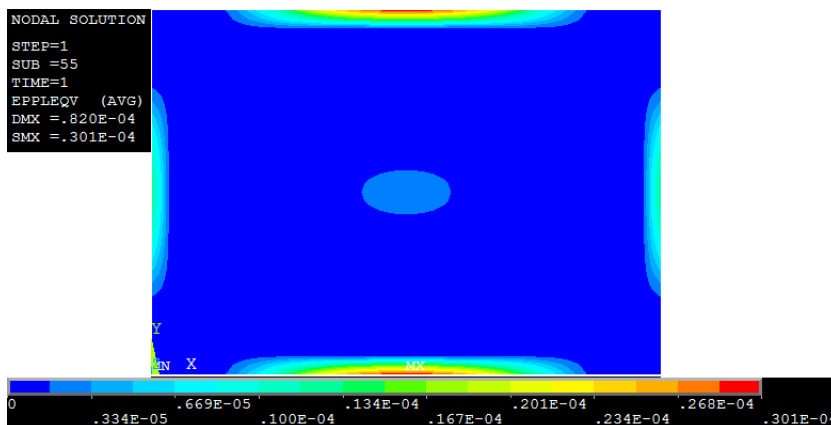
#### 4.3.4 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 14 x 10 m, tloušťka 1 000 mm



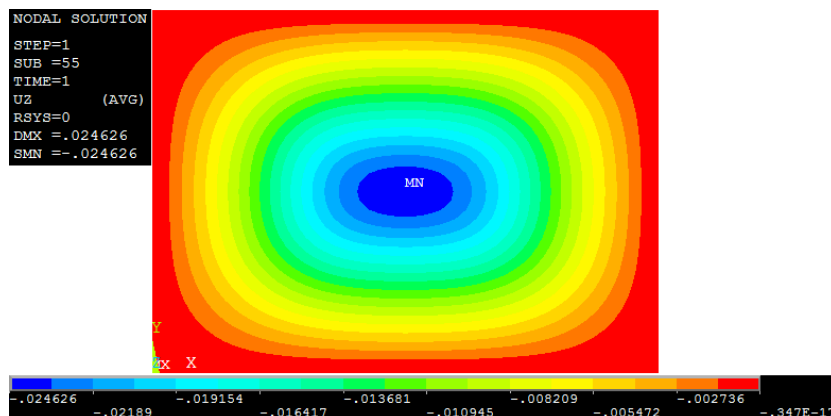
Obrázek 4.3.4.1 Geometrie obdélníkové desky a řešené hodnoty zatížení. První hodnota zatížení odpovídá zatížení v programu RFEM, druhá hodnota je upravená pro program ANSYS.



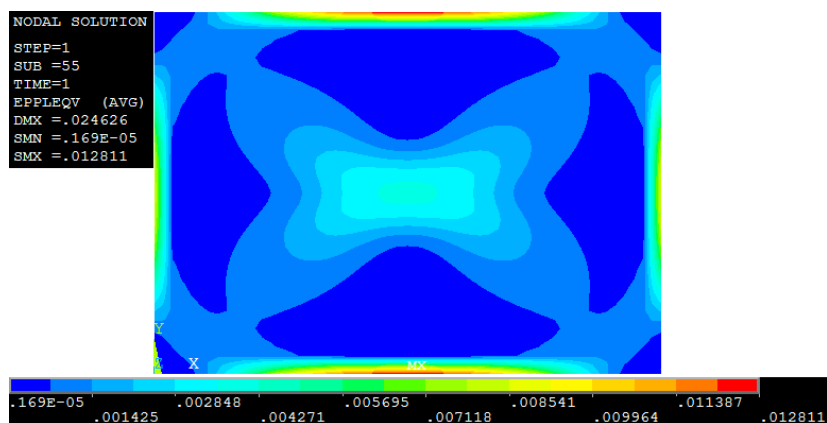
Obrázek 4.3.4.2 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.



Obrázek 4.3.4.3 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.

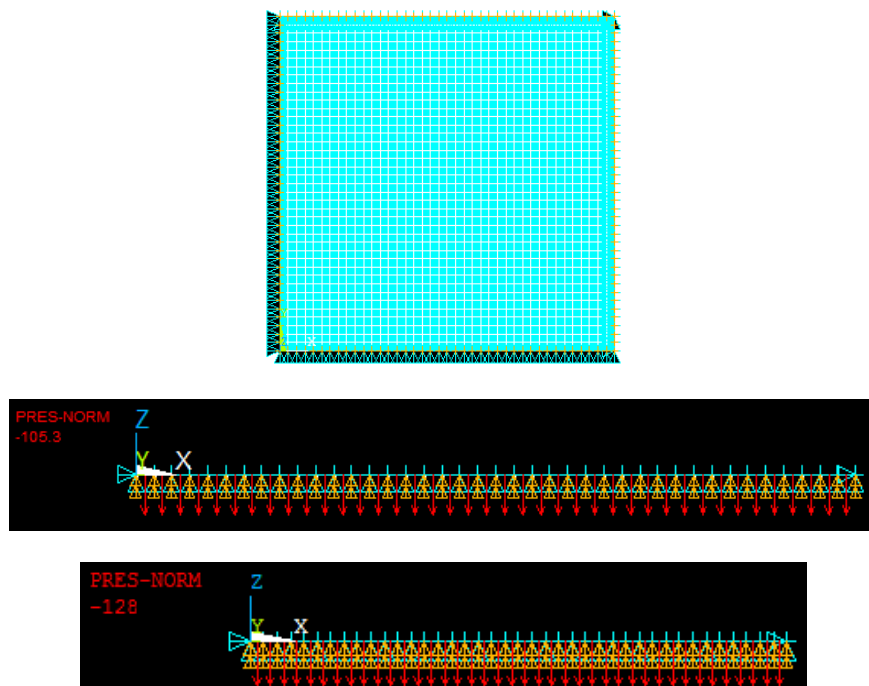


Obrázek 4.3.4.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.



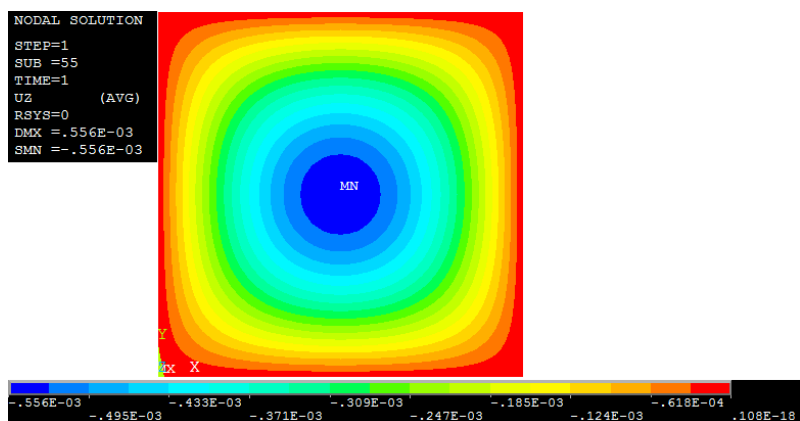
Obrázek 4.3.4.5 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

#### 4.3.5 ČTVERCOVÁ DESKA 10 x 10 m, tloušťka 150 mm

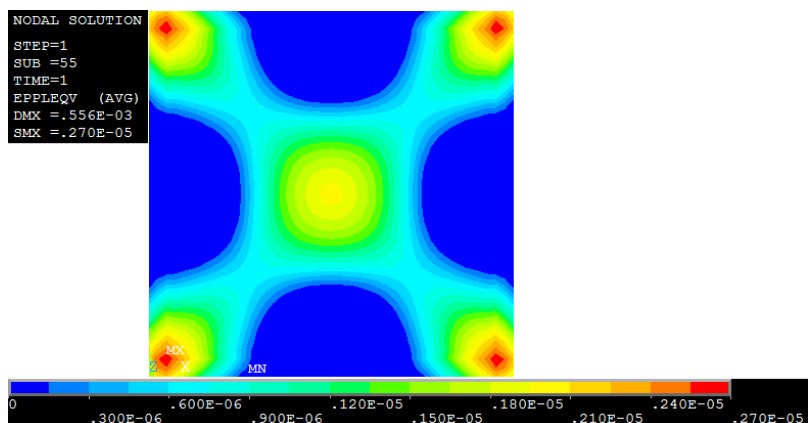


Obrázek 4.3.5.1 Geometrie obdélníkové desky a řešené hodnoty zatížení. První hodnota zatížení odpovídá zatížení v programu RFEM, druhá hodnota je upravená pro program ANSYS.

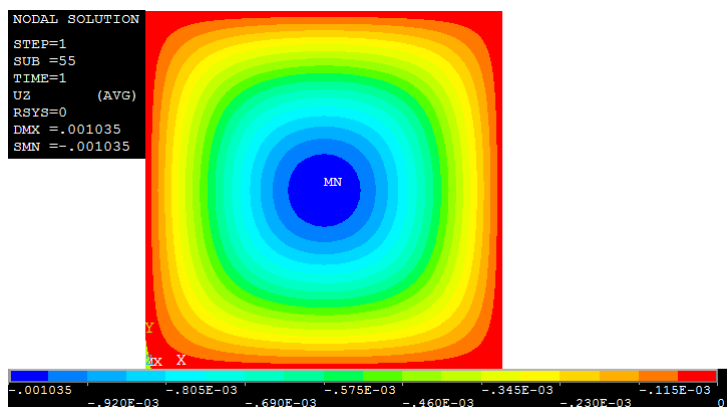




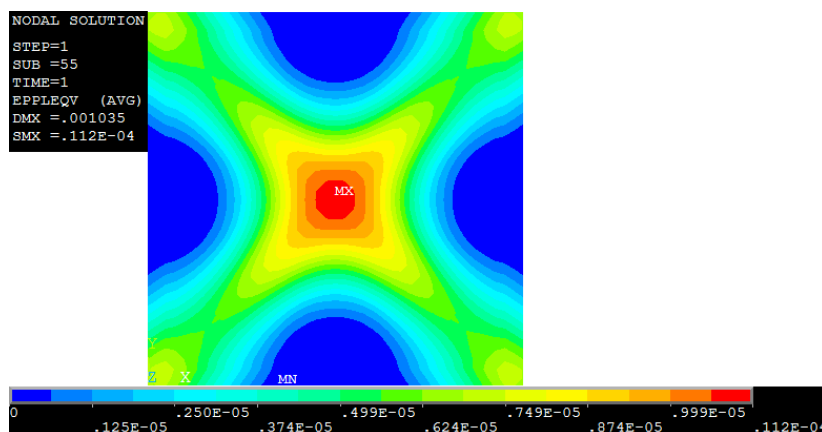
Obrázek 4.3.5.2 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.



Obrázek 4.3.5.3 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.

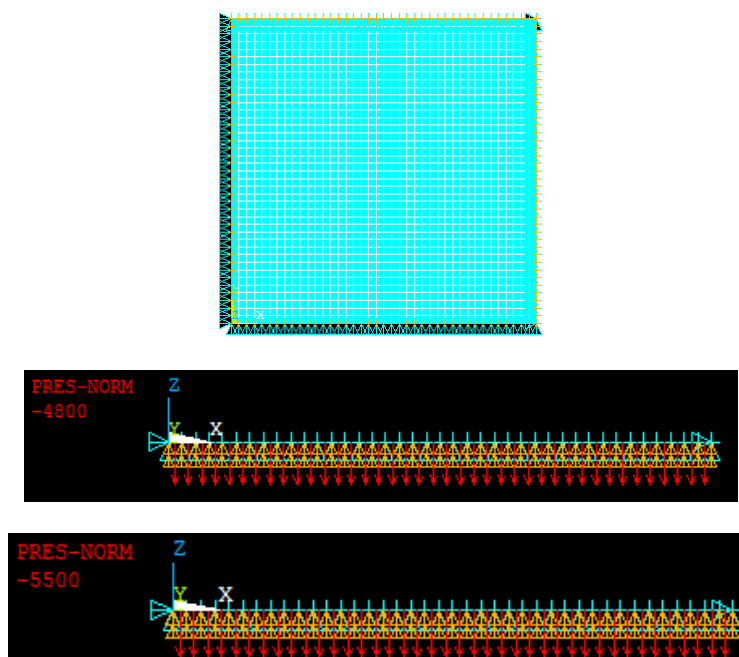


Obrázek 4.3.5.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.



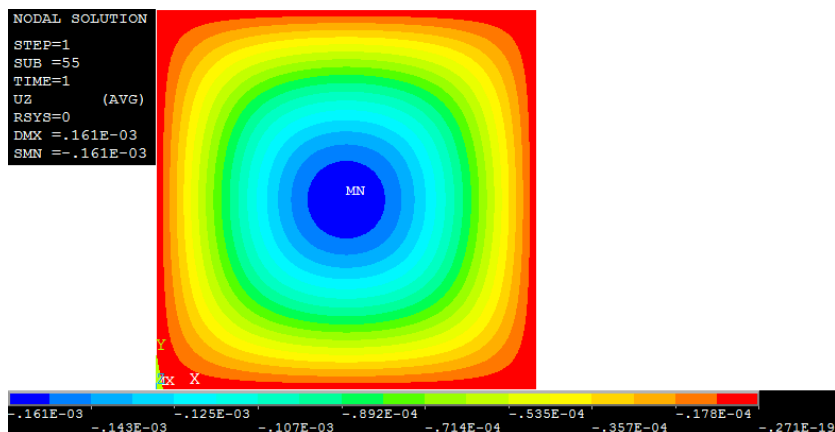
Obrázek 4.3.5.5 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

#### 4.3.6 ČTVERCOVÁ DESKA 10 x 10 m, tloušťka 1 000 mm

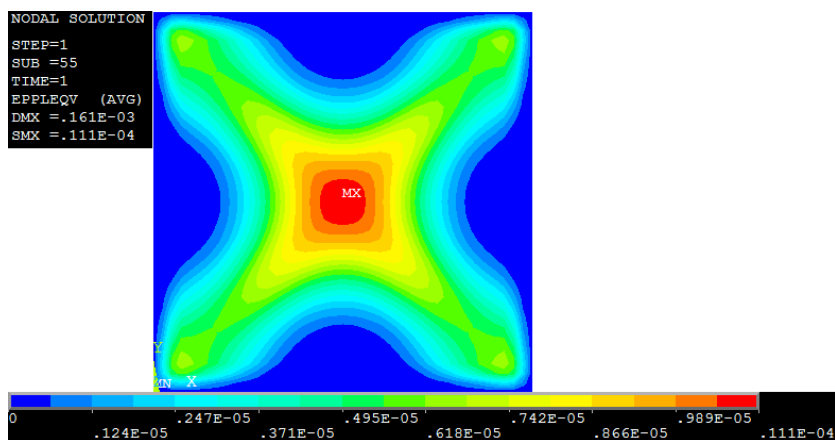


Obrázek 4.3.6.1 Geometrie obdélníkové desky a řešené hodnoty zatížení. První hodnota zatížení odpovídá zatížení v programu RFEM, druhá hodnota je upravená pro program ANSYS.

Pro zatížení, které odpovídá hodnotě zatížení pro program RFEM výpočet nekonverguje. Proto bylo zatížení upraveno pro program ANSYS a výsledky jsou získány pro vyšší hodnotu zatížení.

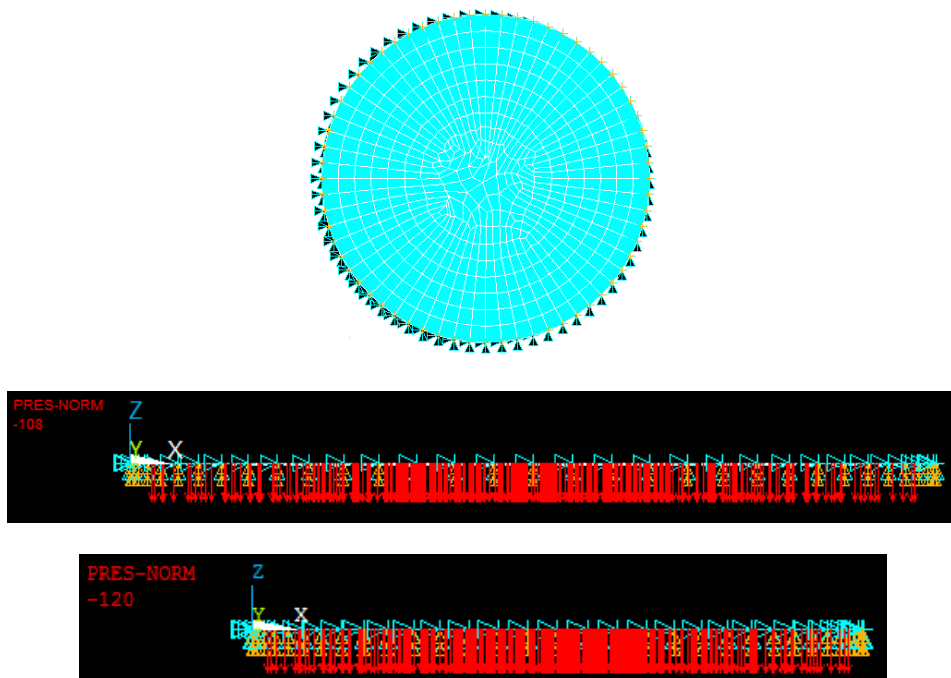


Obrázek 4.3.6.2 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

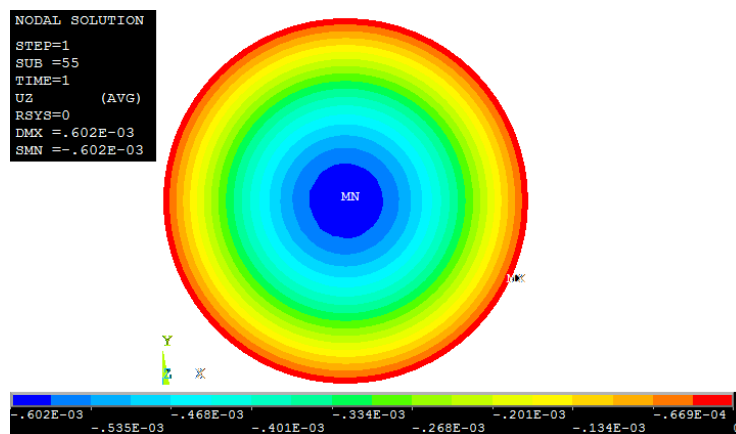


Obrázek 4.3.6.3 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

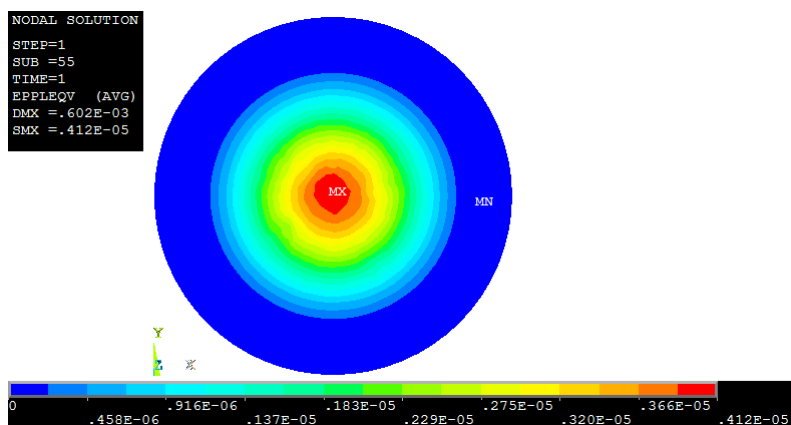
#### 4.3.7 KRUHOVÁ DESKA poloměr 5 m – 1. varianta mechanismu, tloušťka 150 mm



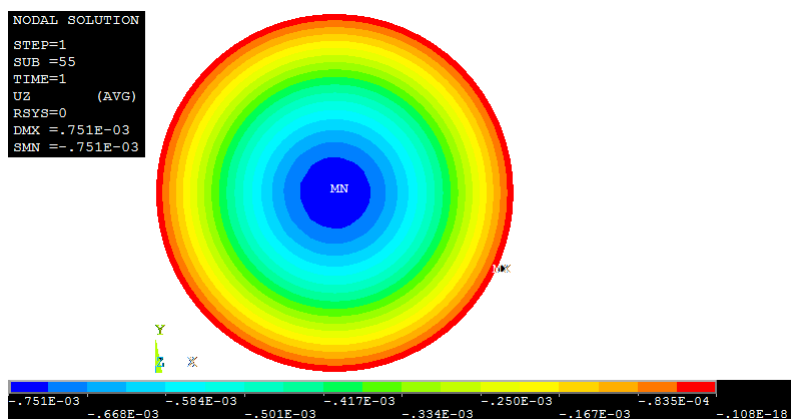
Obrázek 4.3.7.1 Geometrie obdélníkové desky a řešené hodnoty zatížení. První hodnota zatížení odpovídá zatížení v programu RFEM, druhá hodnota je upravená pro program ANSYS.



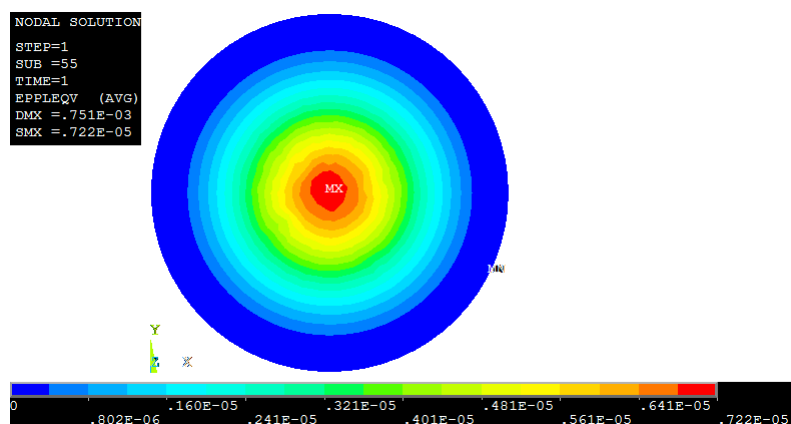
Obrázek 4.3.7.2 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.



Obrázek 4.3.7.3 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.

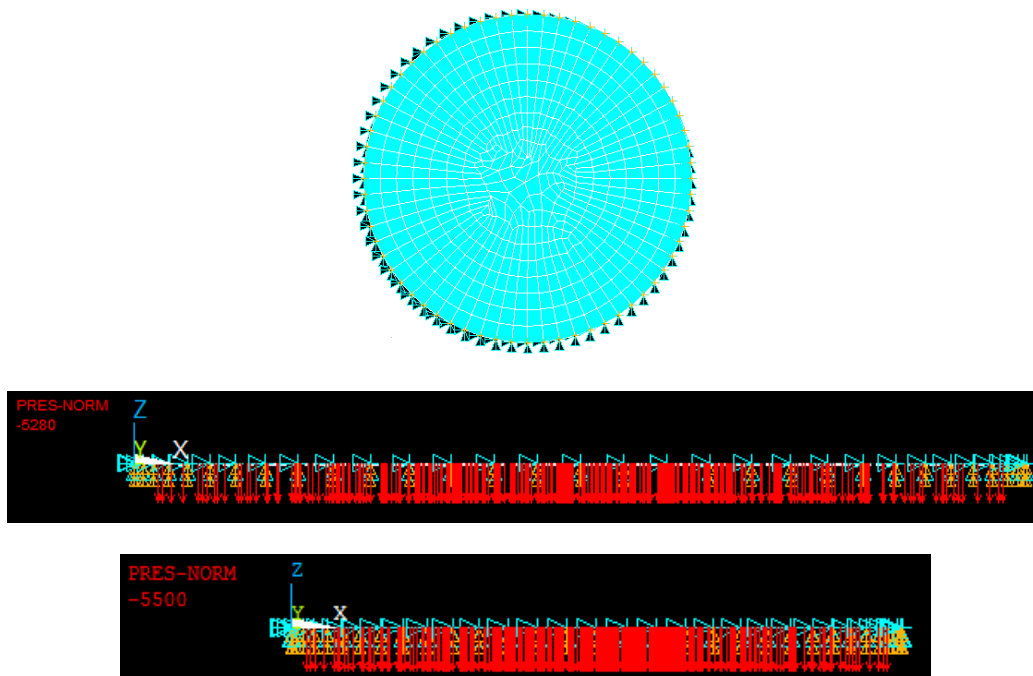


Obrázek 4.3.7.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

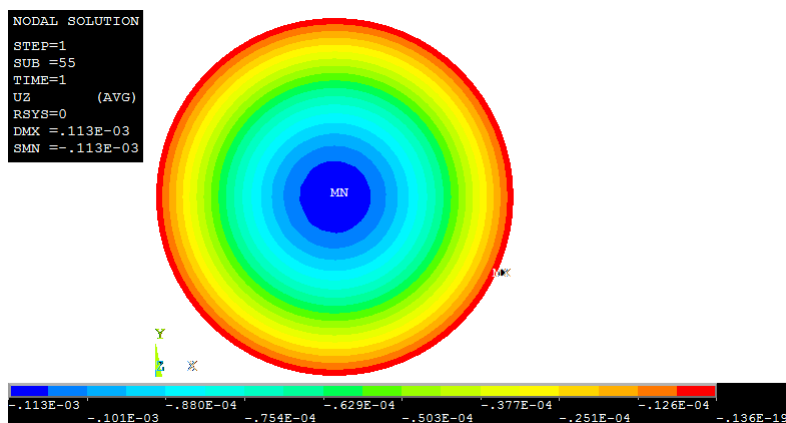


Obrázek 4.3.7.5 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

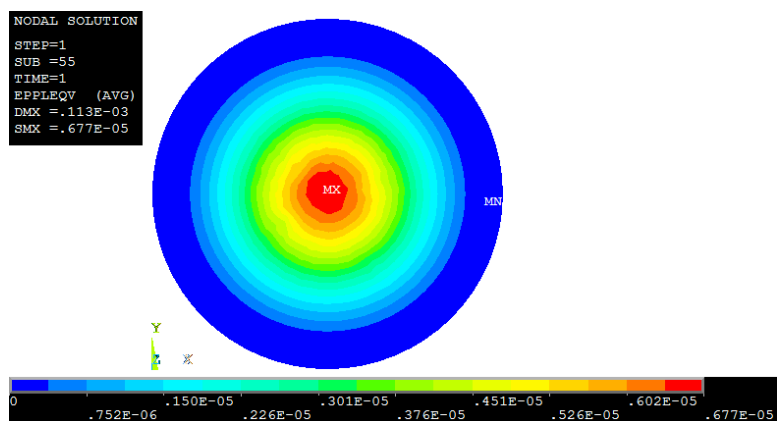
#### 4.3.8 KRUHOVÁ DESKA poloměr 5 m – 1. varianta mechanismu, tloušťka 1 000 mm



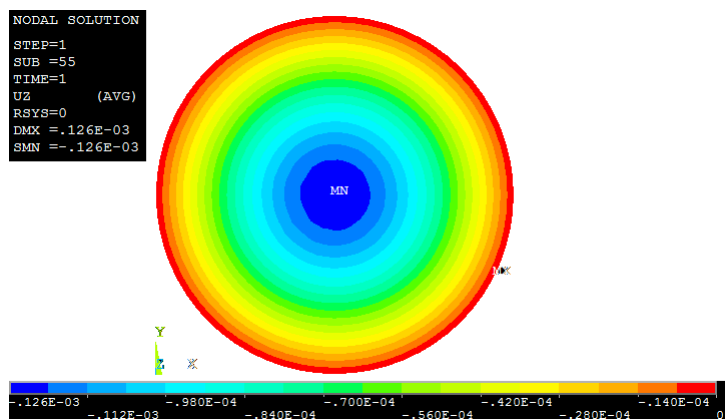
Obrázek 4.3.8.1 Geometrie obdélníkové desky a řešené hodnoty zatížení. První hodnota zatížení odpovídá zatížení v programu RFEM, druhá hodnota je upravená pro program ANSYS.



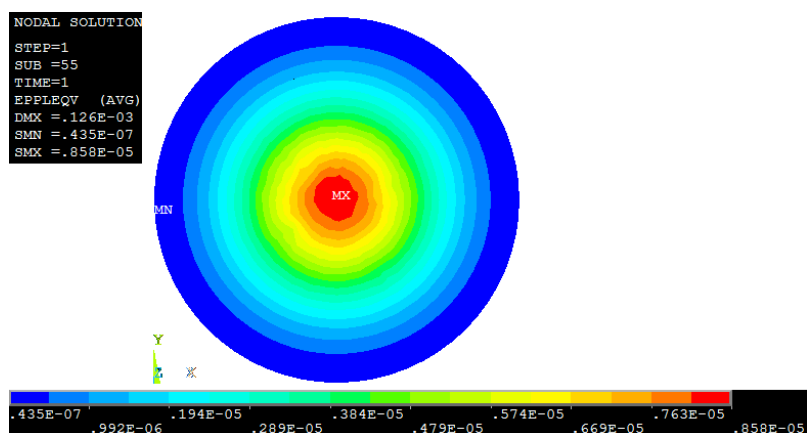
Obrázek 4.3.8.2 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.



Obrázek 4.3.8.3 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.

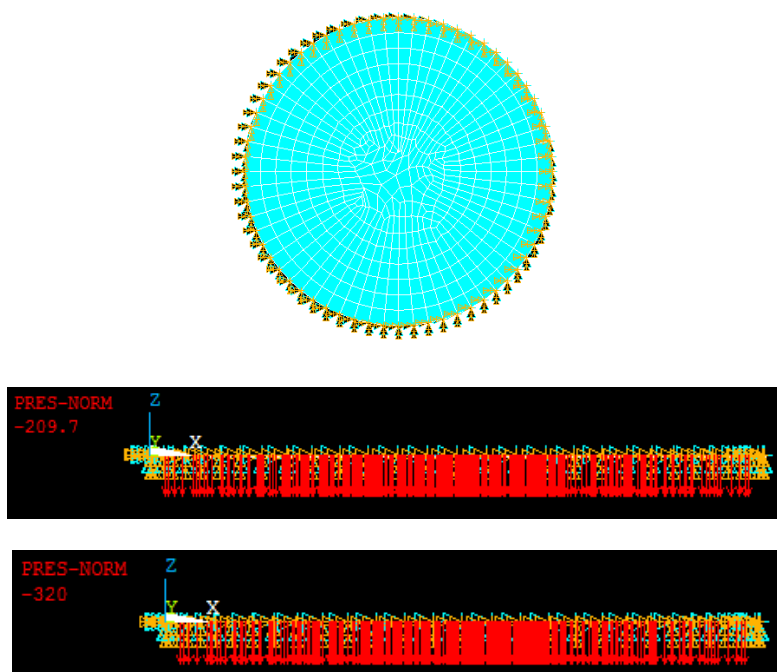


Obrázek 4.3.8.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

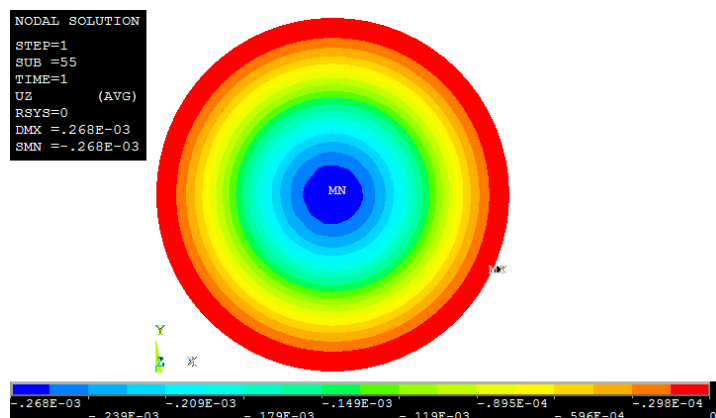


Obrázek 4.3.8.5 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

#### 4.3.9 KRUHOVÁ DESKA poloměr 5 m – 2. varianta mechanismu, tloušťka 150 mm

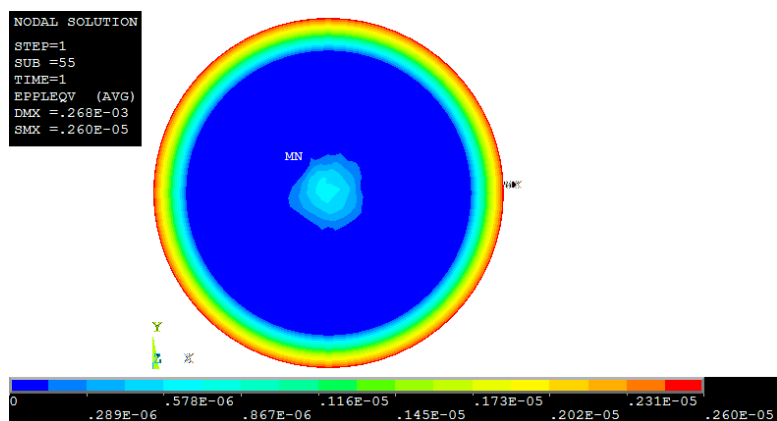


Obrázek 4.3.9.1 Geometrie obdélníkové desky a řešené hodnoty zatížení. První hodnota zatížení odpovídá zatížení v programu RFEM, druhá hodnota je upravená pro program ANSYS.

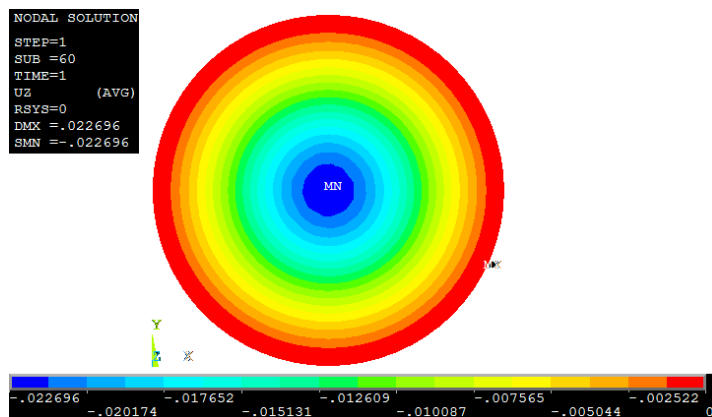


Obrázek 4.3.9.2 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.

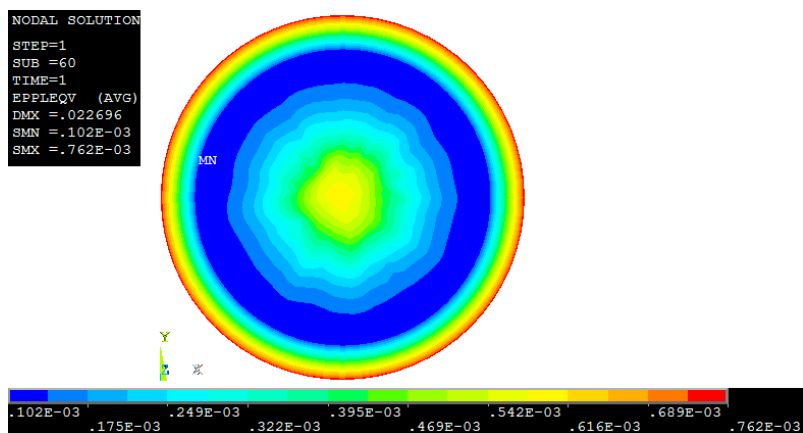




Obrázek 4.3.9.3 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.

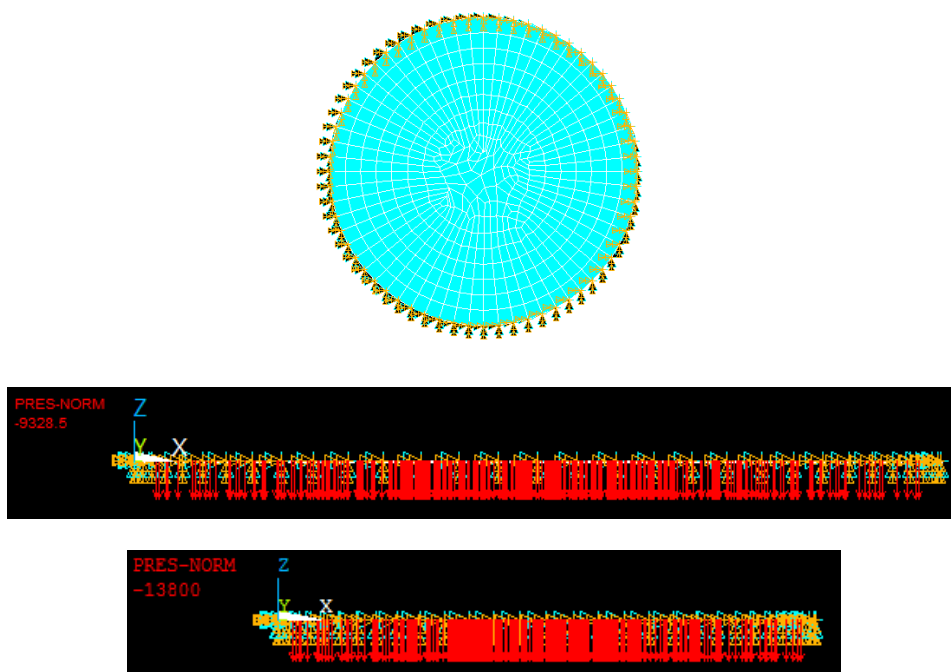


Obrázek 4.3.9.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

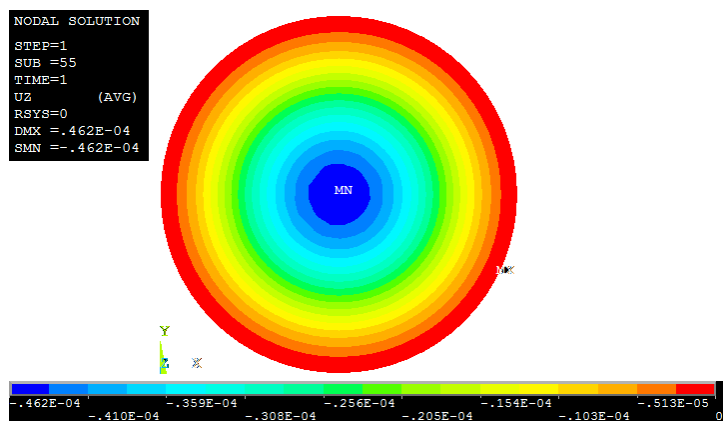


Obrázek 4.3.9.5 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

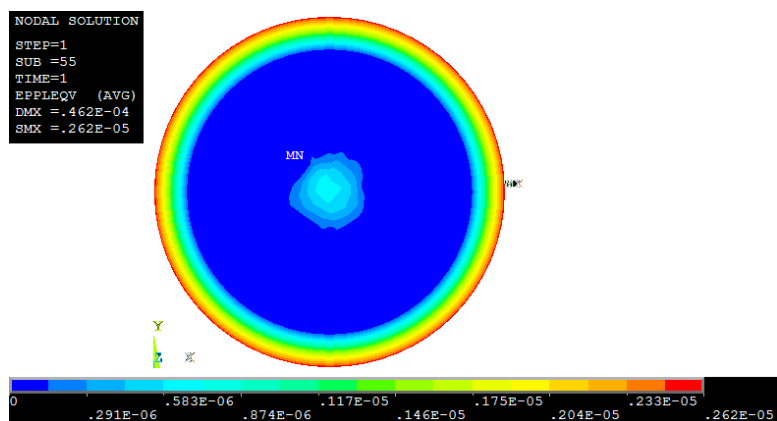
#### 4.3.10 KRUHOVÁ DESKA poloměr 5 m – 2. varianta mechanismu, tloušťka 1 000 mm



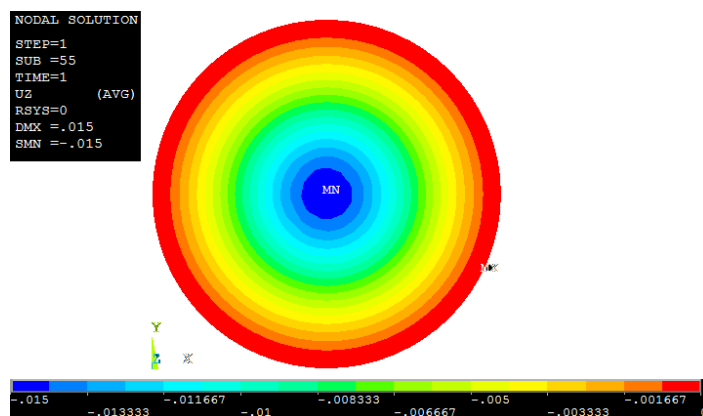
Obrázek 4.3.10.1 Geometrie obdélníkové desky a řešené hodnoty zatížení. První hodnota zatížení odpovídá zatížení v programu RFEM, druhá hodnota je upravená pro program ANSYS.



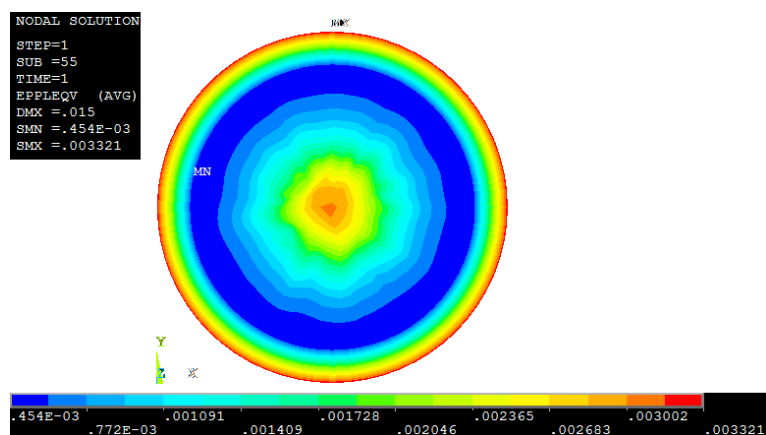
Obrázek 4.3.10.2 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.



Obrázek 4.3.10.3 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.

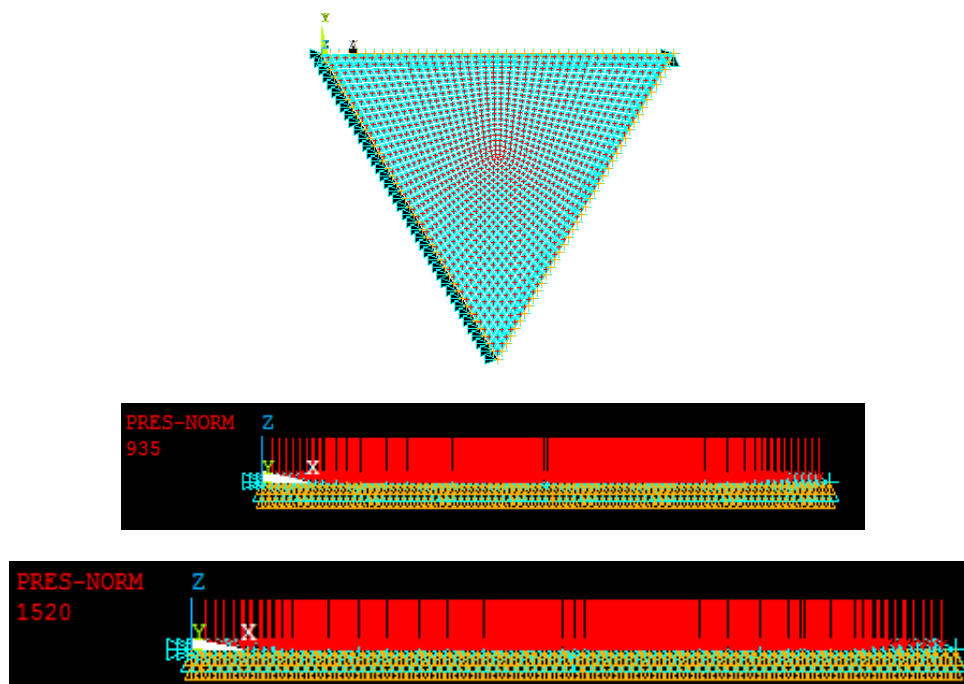


Obrázek 4.3.10.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

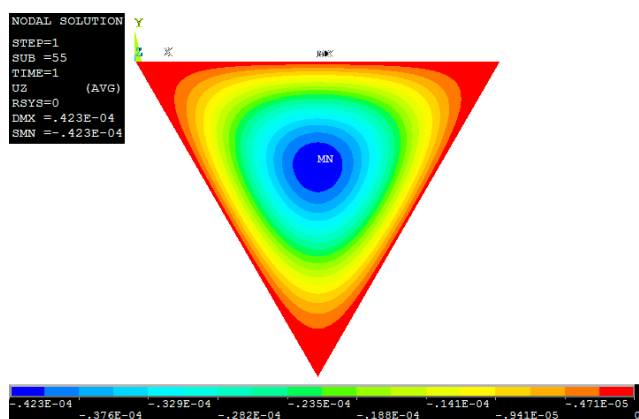


Obrázek 4.3.10.5 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

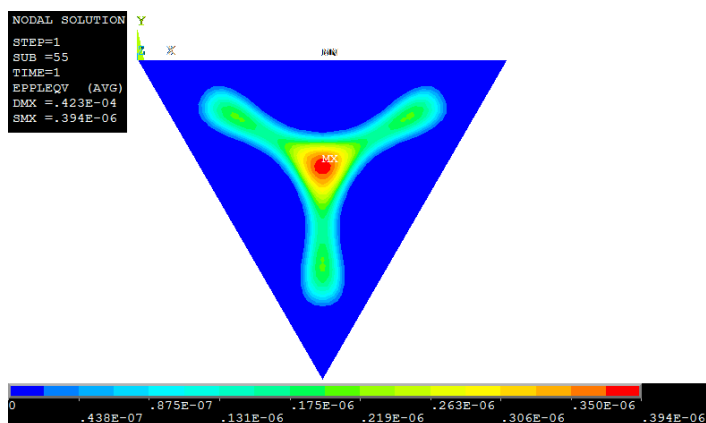
#### 4.3.11 TROJÚHELNÍKOVÁ DESKA strana 5 m, tloušťka 150 mm



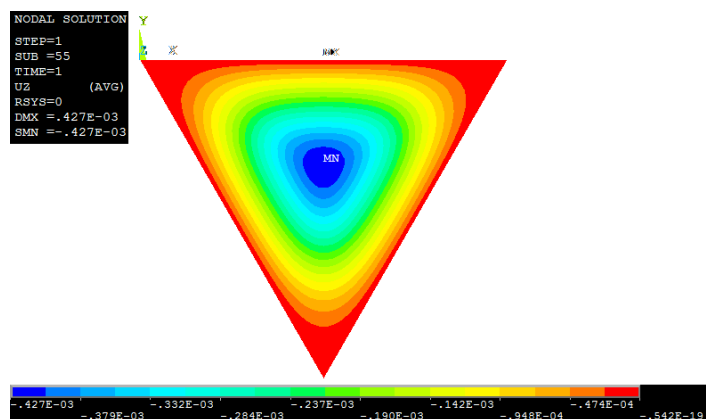
Obrázek 4.3.11.1 Geometrie obdélníkové desky a řešené hodnoty zatížení. První hodnota zatížení odpovídá zatížení v programu RFEM, druhá hodnota je upravená pro program ANSYS.



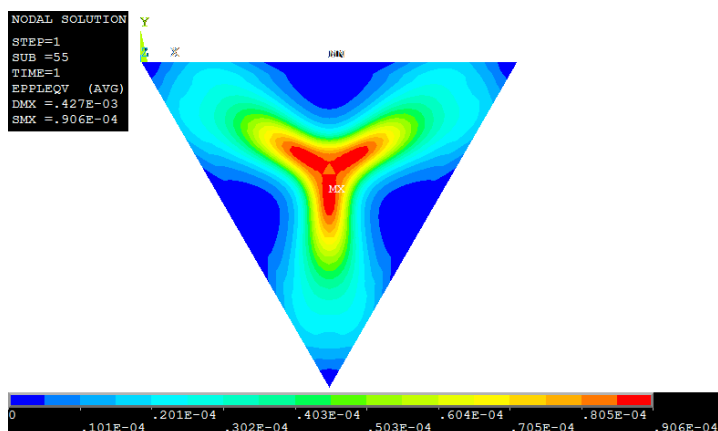
Obrázek 4.3.11.2 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.



Obrázek 4.3.11.3 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.

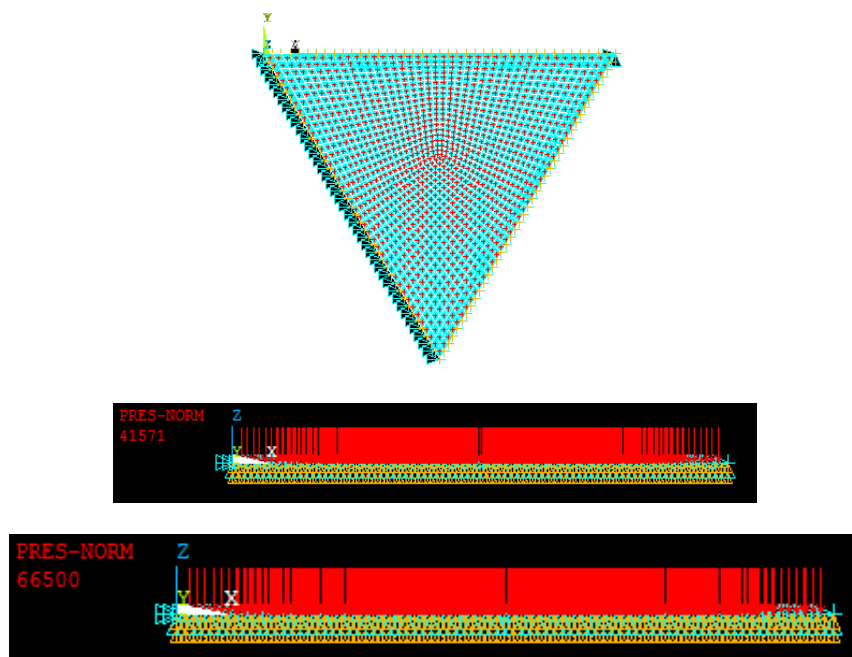


Obrázek 4.3.11.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

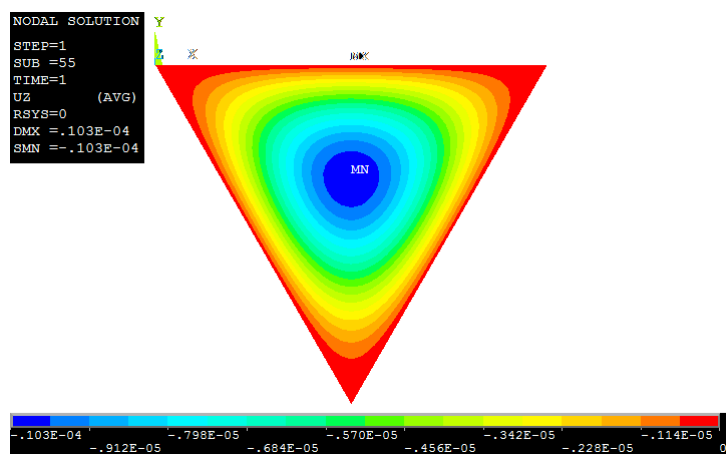


Obrázek 4.3.11.5 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

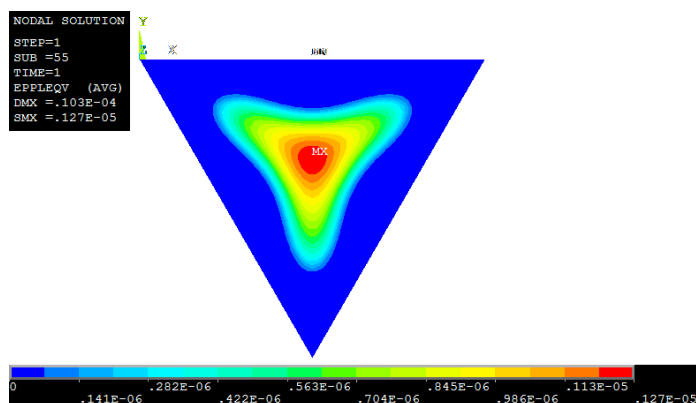
#### 4.3.12 TROJÚHELNÍKOVÁ DESKA strana 5 m, tloušťka 1 000 mm



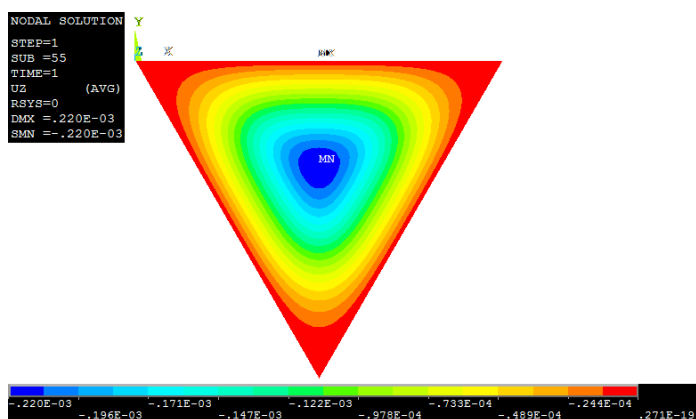
Obrázek 4.3.12.1 Geometrie obdélníkové desky a řešené hodnoty zatížení. První hodnota zatížení odpovídá zatížení v programu RFEM, druhá hodnota je upravená pro program ANSYS.



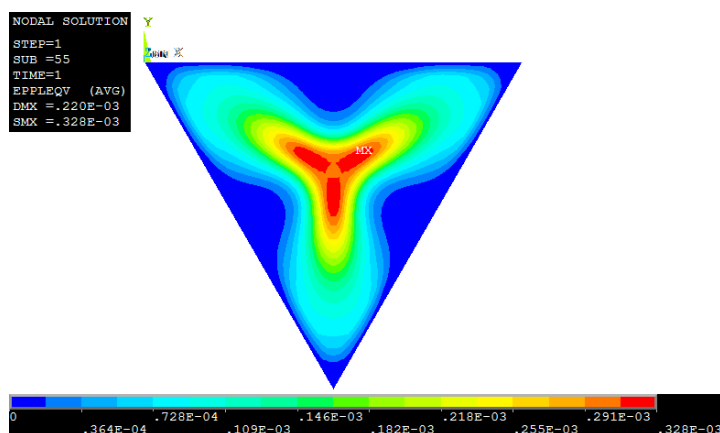
Obrázek 4.3.12.2 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.



Obrázek 4.3.12.3 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.

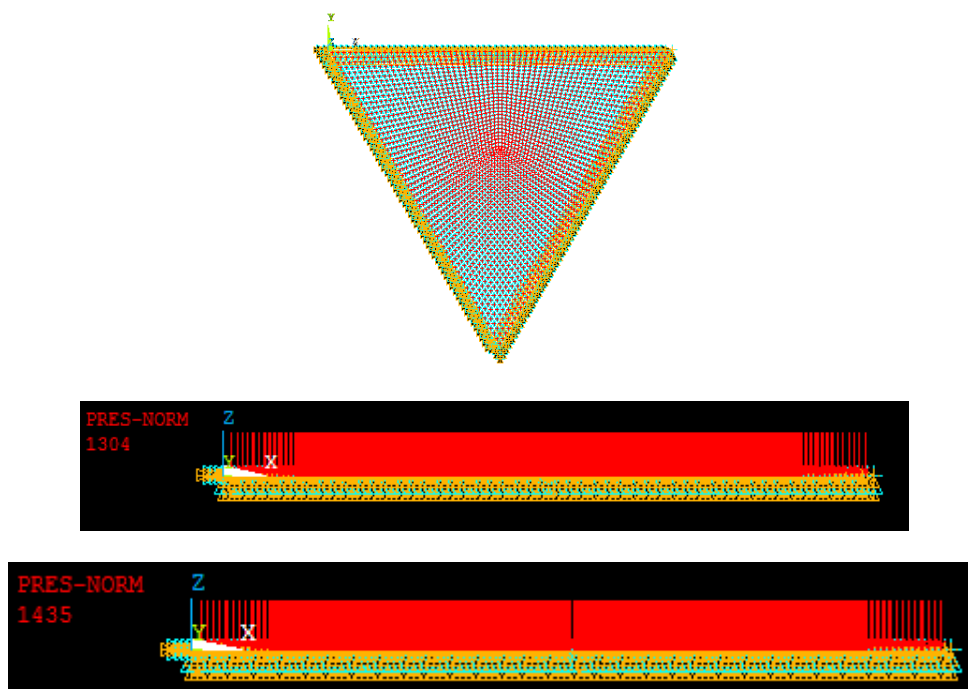


Obrázek 4.3.12.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

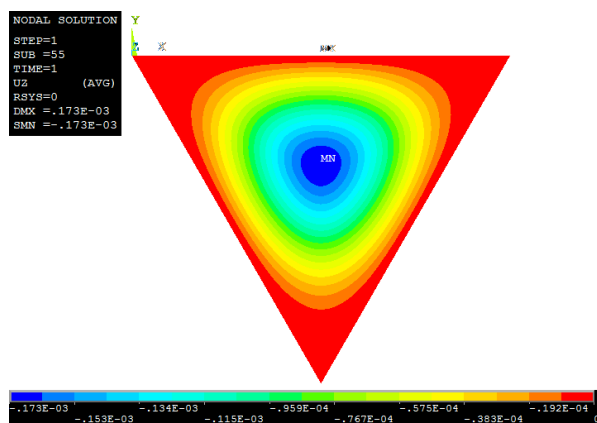


Obrázek 4.3.12.5 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

#### 4.3.13 TROJÚHELNÍKOVÁ DESKA strana 7 m, tloušťka 150 mm

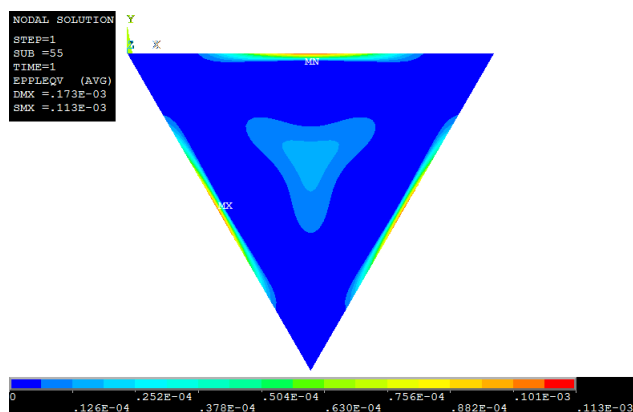


Obrázek 4.3.13.1 Geometrie obdélníkové desky a řešené hodnoty zatížení. První hodnota zatížení odpovídá zatížení v programu RFEM, druhá hodnota je upravená pro program ANSYS.

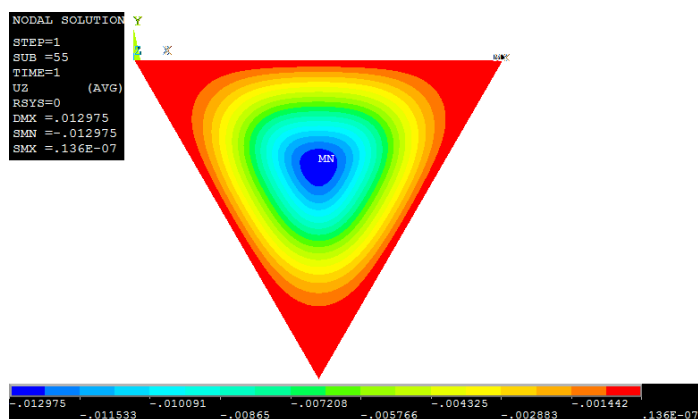


Obrázek 4.3.13.2 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.

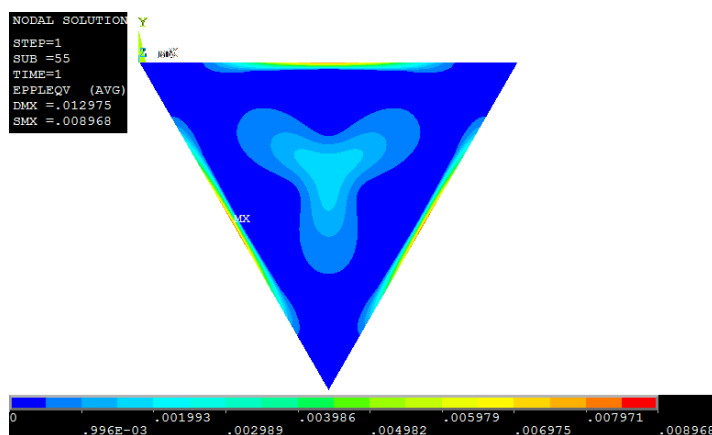




Obrázek 4.3.13.3 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.

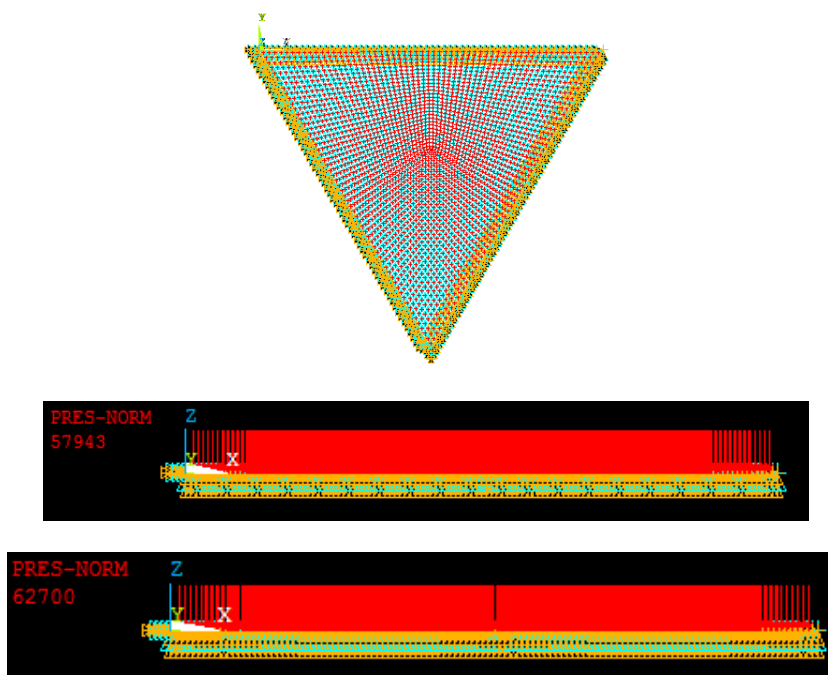


Obrázek 4.3.13.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

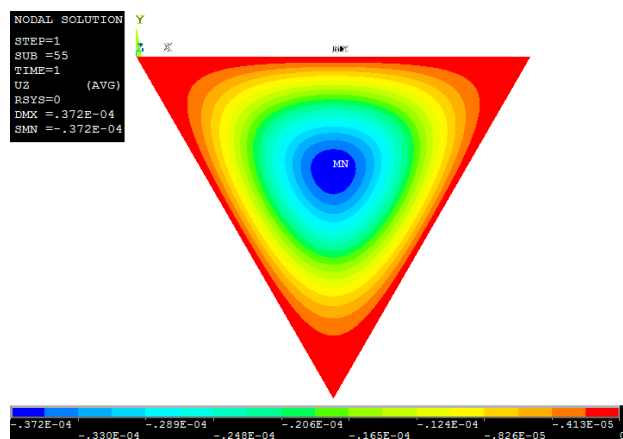


Obrázek 4.3.13.5 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

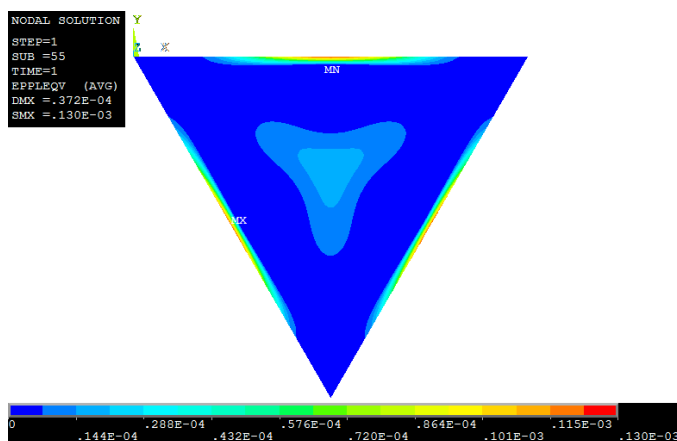
#### 4.3.14 TROJÚHELNÍKOVÁ DESKA strana 7 m, tloušťka 1 000 mm



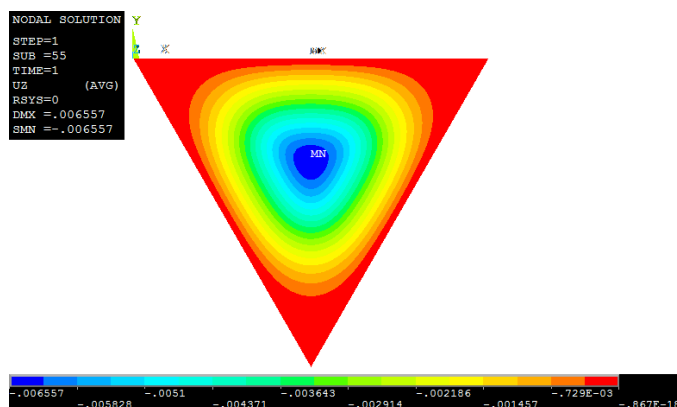
Obrázek 4.3.14.1 Geometrie obdélníkové desky a řešené hodnoty zatížení. První hodnota zatížení odpovídá zatížení v programu RFEM, druhá hodnota je upravená pro program ANSYS.



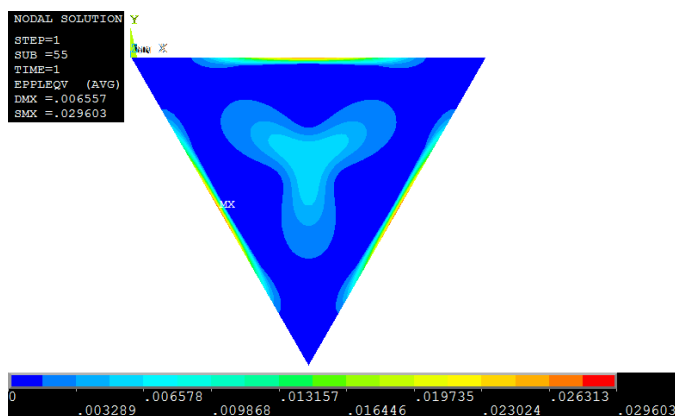
Obrázek 4.3.14.2 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.



Obrázek 4.3.14.3 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.

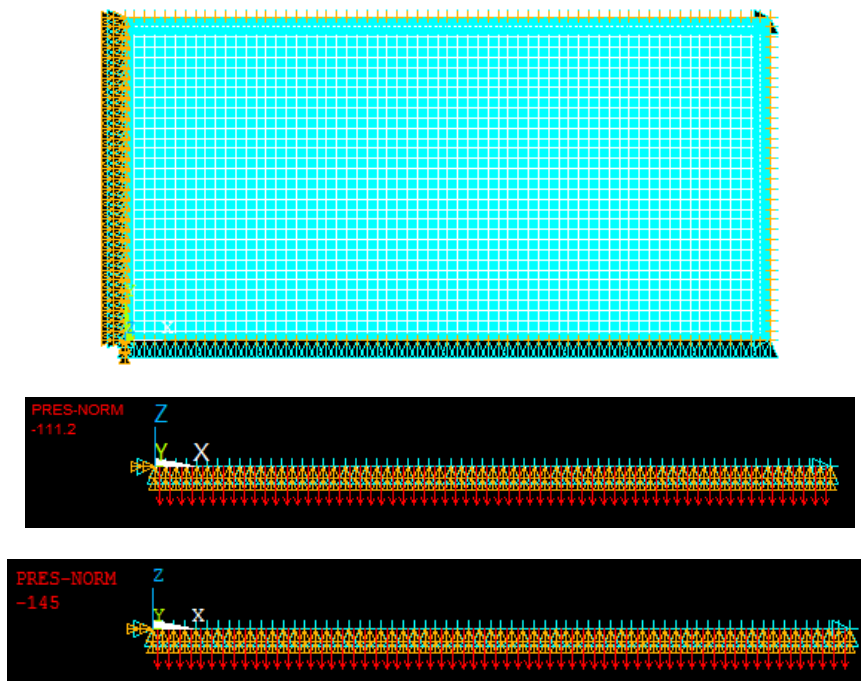


Obrázek 4.3.14.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

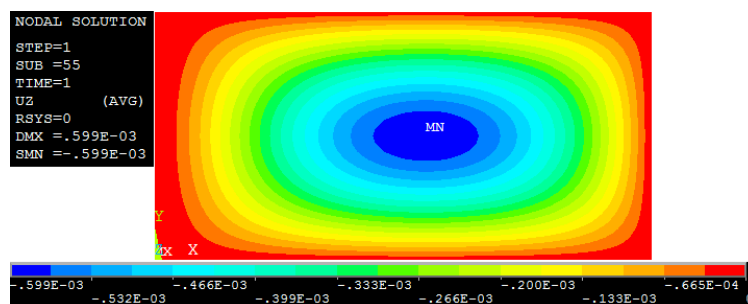


Obrázek 4.3.14.5 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

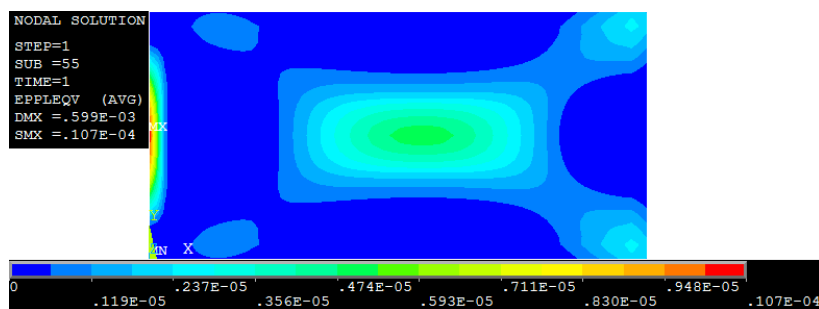
#### 4.3.15 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 16 x 8 m, tloušťka 150 mm, nesymetricky uložená



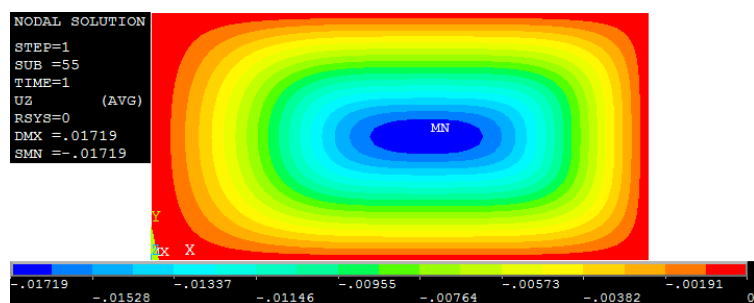
Obrázek 4.3.15.1 Geometrie obdélníkové desky a řešené hodnoty zatížení. První hodnota zatížení odpovídá zatížení v programu RFEM, druhá hodnota je upravená pro program ANSYS.



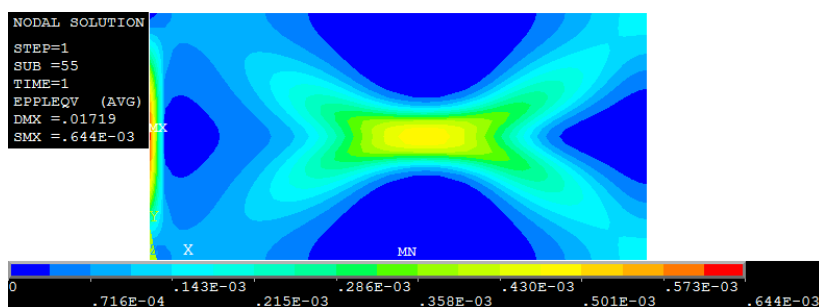
Obrázek 4.3.15.2 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.



Obrázek 4.3.15.3 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.

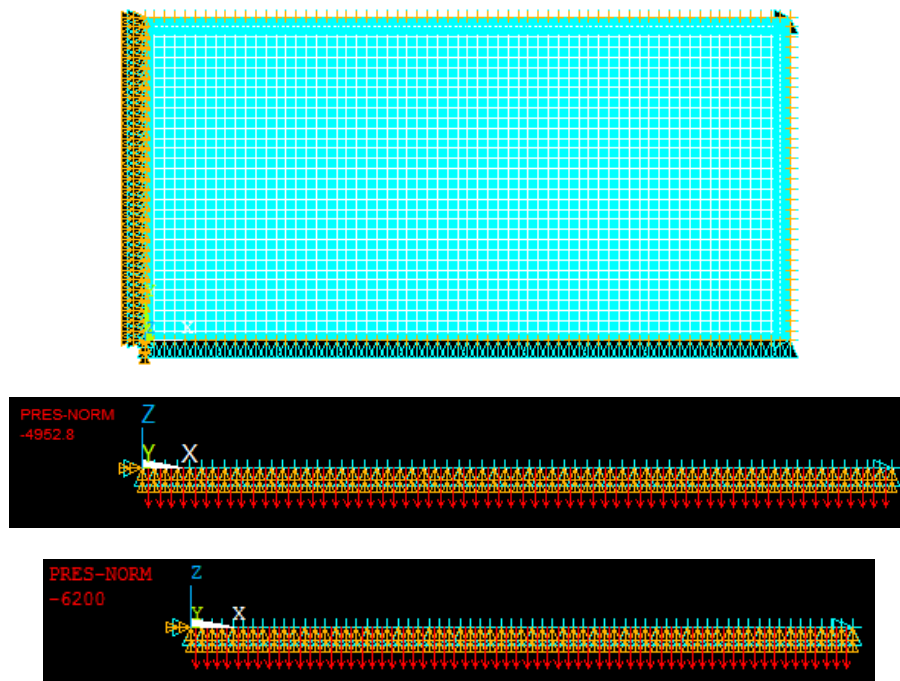


Obrázek 4.3.15.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

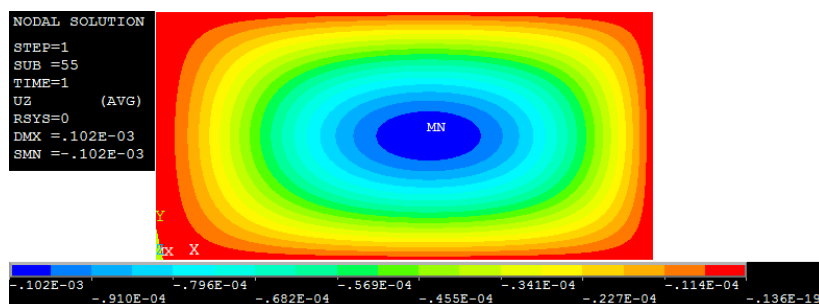


Obrázek 4.3.15.5 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

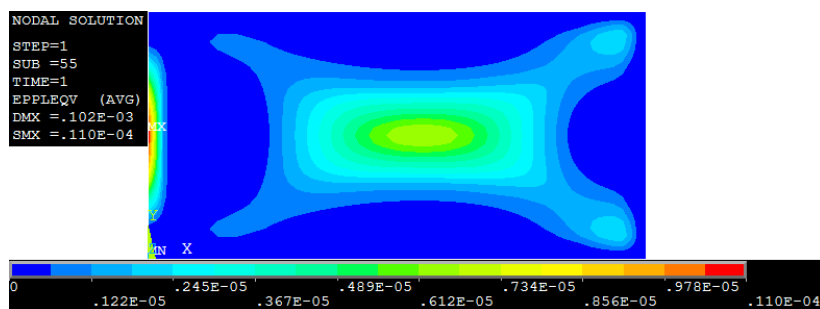
#### 4.3.16 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 16 x 8 m, tloušťka 1 000 mm, nesymetricky uložená



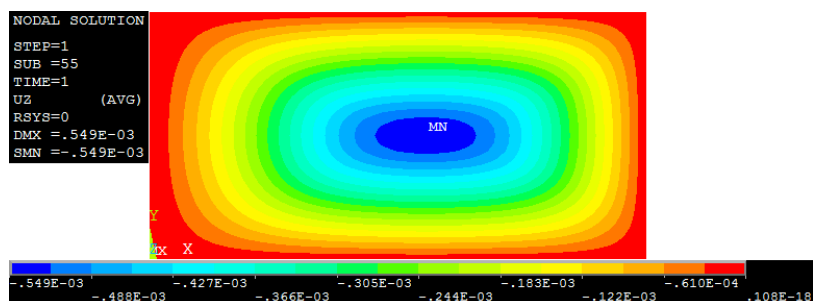
Obrázek 4.3.16.1 Geometrie obdélníkové desky a řešené hodnoty zatížení. První hodnota zatížení odpovídá zatížení v programu RFEM, druhá hodnota je upravená pro program ANSYS.



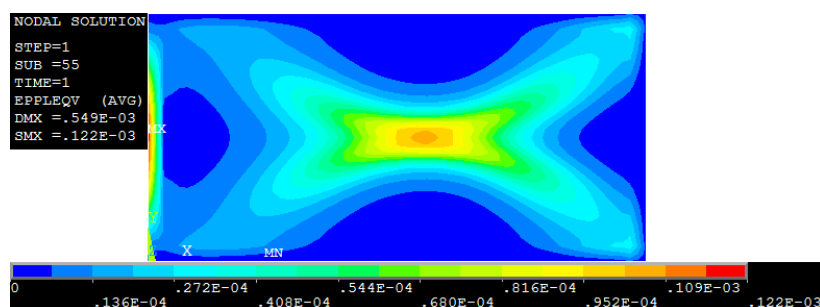
Obrázek 4.3.16.2 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.



Obrázek 4.3.16.3 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.

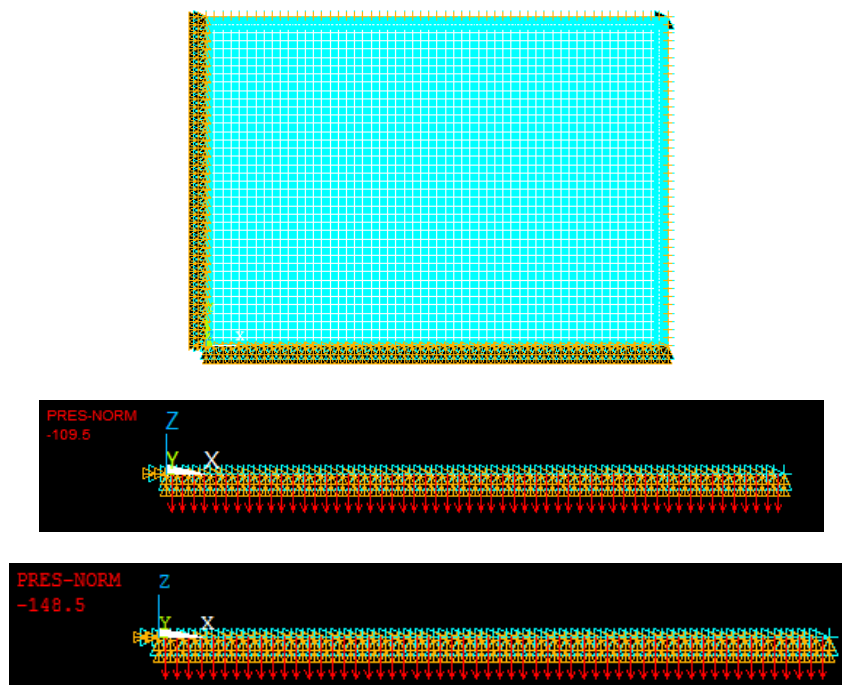


Obrázek 4.3.16.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

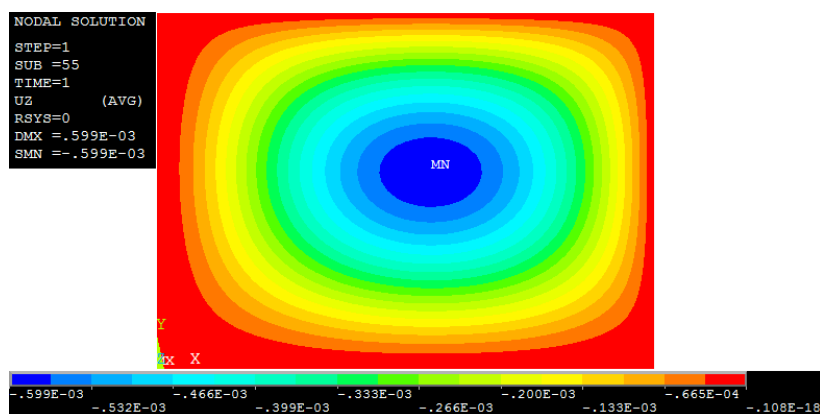


Obrázek 4.3.16.5 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

#### 4.3.17 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 14 x 10 m, tloušťka 150 mm, nesymetricky uložená

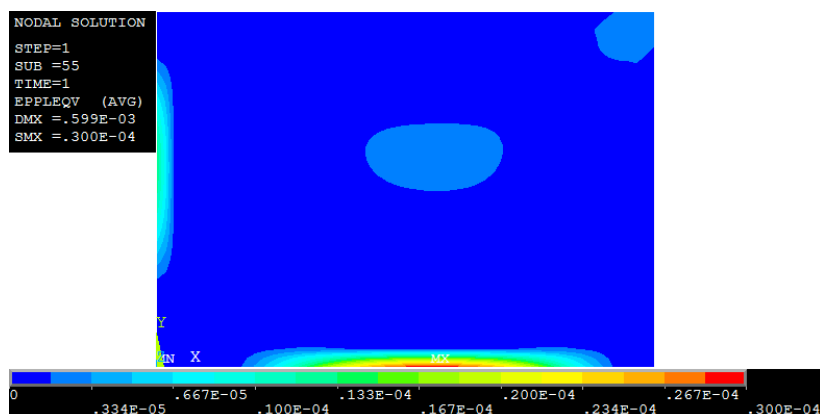


Obrázek 4.3.17.1 Geometrie obdélníkové desky a řešené hodnoty zatížení. První hodnota zatížení odpovídá zatížení v programu RFEM, druhá hodnota je upravená pro program ANSYS.

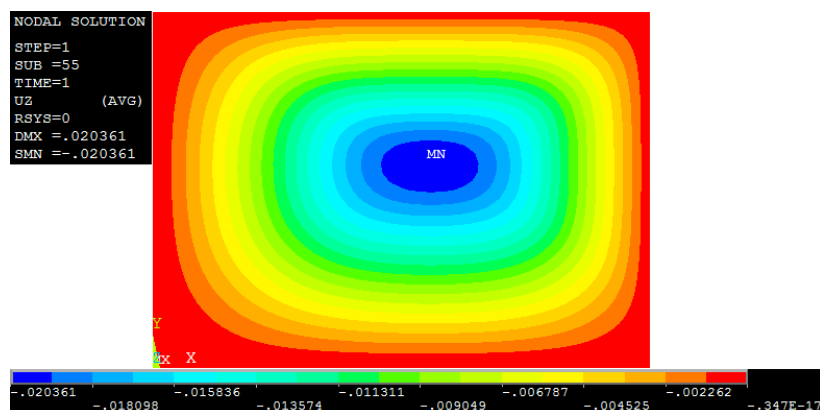


Obrázek 4.3.17.2 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.

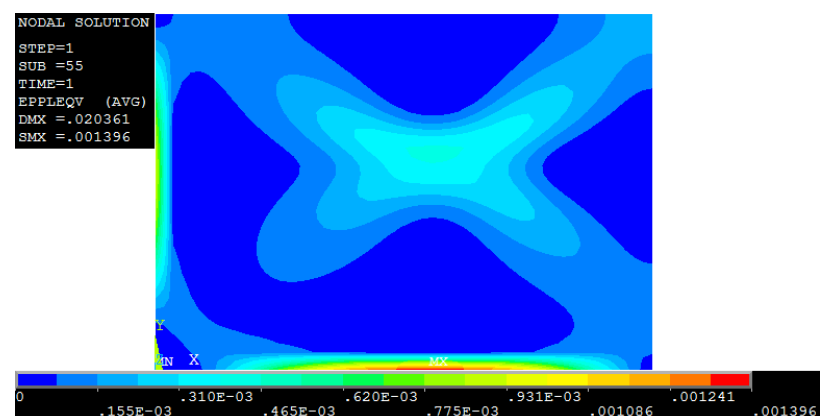




Obrázek 4.3.17.3 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.

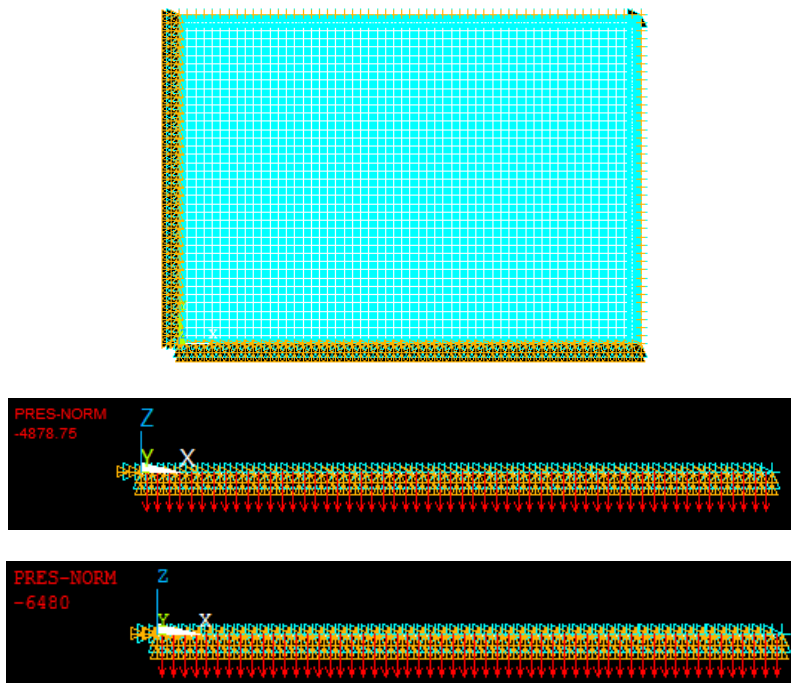


Obrázek 4.3.17.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

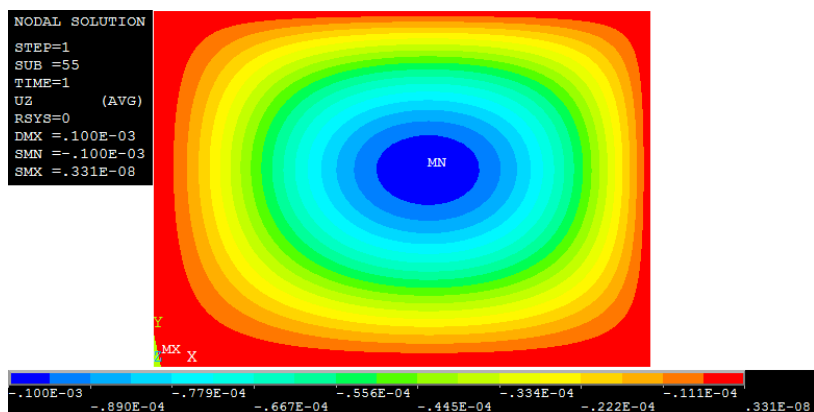


Obrázek 4.3.17.5 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

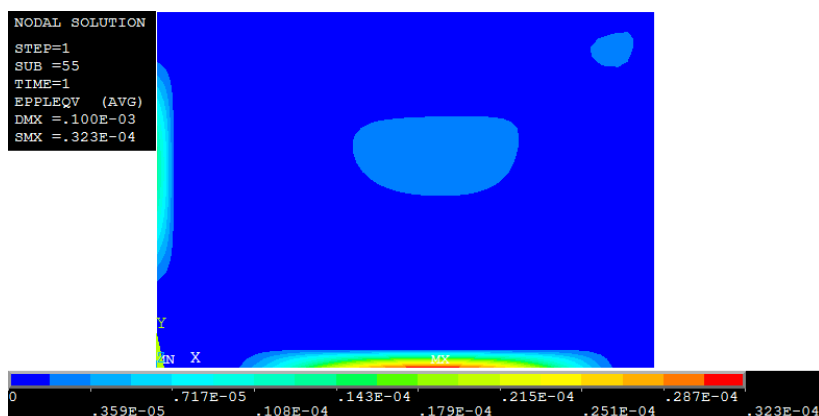
#### 4.3.18 OBDÉLNÍKOVÁ DESKA 14 x 10 m, tloušťka 1 000 mm, nesymetricky uložená



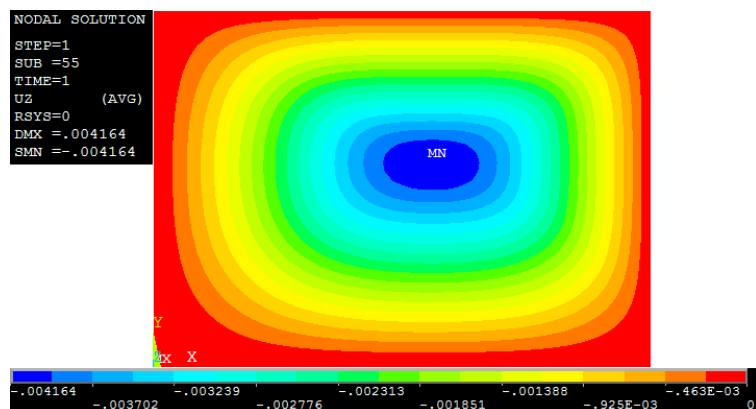
Obrázek 4.3.18.1 Geometrie obdélníkové desky a řešené hodnoty zatížení. První hodnota zatížení odpovídá zatížení v programu RFEM, druhá hodnota je upravená pro program ANSYS.



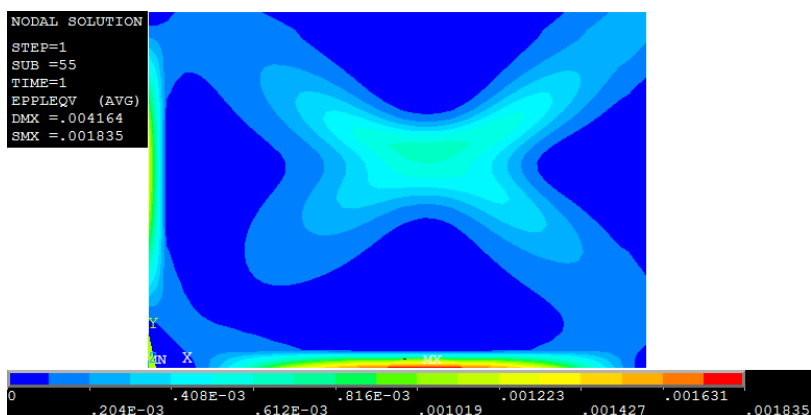
Obrázek 4.3.18.2 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.



Obrázek 4.3.18.3 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení odpovídající hodnotě v programu RFEM.



Obrázek 4.3.18.4 Výsledná globální deformace ve směru osy z, pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.



Obrázek 4.3.18.5 Výsledný průběh zplastizování pro hodnotu zatížení upravenou pro program ANSYS.

## 5 ZÁVĚR

Řešení mezního zatížení je popsáno v praktické části práce, kde jsou uvedeny i grafické výstupy pro jednotlivé hodnoty. Pro porovnání výsledného mezního zatížení byly hodnoty sestaveny do tabulky 5.1, kde jsou pro každou desku uvedeny hodnoty zjištěné pomocí každé z použitých metod.

Na rozdíl od ručního výpočtu, který dá pro zvolený kinematický mechanismus jednoznačnou hodnotu mezního zatížení, nelze u výpočtu MKP dospět k jednoznačnému číslu. Ztráta stability je odhadnuta subjektivně v souladu s nejobecnější definicí stability podle Ljapunova, která je založena na tom, že za nestabilní je prohlášen stav, kdy malé změně vstupních dat odpovídá velká změna výsledků. Určení jak velká tato změna má být už je subjektivní. U programu RFEM byl ve shodě s výše uvedenou definicí stability prohlášen stav, kdy průběh deformací již přestal být lineární funkcí zatížení, a začalo docházet ke zvýšenému nárůstu průhybu desky. U programu ANSYS se nepodařilo zobrazit graf závislosti průhybu na zatížení, proto byl za kritický stav prohlášen takový stav, při kterém byly vyvinuty liniové plastické klouby v takovém rozsahu, který umožňoval kinematiku kolapsu desky.

Zhodnocení numerických výsledků výpočtu mezního zatížení desek provedeného ručně, programem RFEM a programem ANSYS je uvedeno v následující tabulce. Z tabulky je patrné, že bylo dosaženo poměrně velké shody ručního výpočtu kinematickou metodou s přesnějším výpočtem MKP. Oba použité programy dávaly prakticky stejnou odezvu desky na zatížení i pro hodnoty zatížení blízké meznímu zatížení. Rozdíly byly jen v zobrazení míry zplastizování, kde ANSYS dával pro stejné zatížení sice stejné deformace jako RFEM, ale ukazoval v grafice menší míru zplastizování. Tento rozdíl v grafické prezentaci je pravděpodobně způsoben tím, že zatímco RFEM dává míru zplastizování v krajních vláknech, ANSYS ji pravděpodobně dává v Gaussových bodech nejbližších ke krajním vláknům.

| Základní údaje |  |                    | Metoda řešení                         |                                       |                                       |                           |                                       |                           |                                       |                           |        |
|----------------|--|--------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------|---------------------------------------|---------------------------|---------------------------------------|---------------------------|--------|
| Uložení        | Deska  | Tloušťka<br>[ mm ] | ruční výpočet                         |                                       | pomocí programu RFEM                  |                           | pomocí programu ANSYS                 |                           | pomocí programu ANSYS                 |                           |        |
|                |  |                    | mezí zatížení p [ kN/m <sup>2</sup> ] | mezí zatížení p [ kN/m <sup>2</sup> ] | mezí zatížení p [ kN/m <sup>2</sup> ] | maximální průhyb u [ mm ] | mezí zatížení p [ kN/m <sup>2</sup> ] | maximální průhyb u [ mm ] | mezí zatížení p [ kN/m <sup>2</sup> ] | maximální průhyb u [ mm ] |        |
| symetrické     | ODDĚLNÍKOVÁ 16 x 8 m<br>prosté podepření                 | 150                | 0,106                                 | 0,095                                 | 0,515                                 | 0,095                     | 0,515                                 | 0,095                     | 0,515                                 | 0,132                     | 7,000  |
|                |  | 1 000              | 4,688                                 | 4,219                                 | 0,086                                 | 4,219                     | 0,000                                 | 4,219                     | 0,000                                 | 4,770                     | 0,114  |
|                | OBDĚLNÍKOVÁ 14 x 10 m<br>velknutí                        | 150                | 0,194                                 | 0,146                                 | 0,505                                 | 0,146                     | 0,496                                 | 0,146                     | 0,496                                 | 0,198                     | 24,171 |
|                |  | 1 000              | 8,025                                 | 6,409                                 | 0,084                                 | 6,409                     | 0,082                                 | 6,409                     | 0,082                                 | 8,700                     | 24,026 |
|                | ČTYRHOVÁ 10 x 10 m<br>prosté podepření                   | 150                | 0,135                                 | 0,105                                 | 0,559                                 | 0,105                     | 0,559                                 | 0,105                     | 0,555                                 | 0,128                     | 1,035  |
|                |  | 1 000              | 6,000                                 | 4,800                                 | 0,100                                 | 4,800                     | nekonverguje                          | 4,800                     | nekonverguje                          | 5,500                     | 0,161  |
|                | KRUHOVÁ poloměr 5 m - 1. varianta<br>prosté podepření    | 150                | 0,540                                 | 0,108                                 | 0,601                                 | 0,108                     | 0,601                                 | 0,108                     | 0,602                                 | 0,120                     | 0,751  |
|                |  | 1 000              | 24,001                                | 5,280                                 | 0,113                                 | 5,280                     | 0,113                                 | 5,280                     | 0,113                                 | 5,500                     | 0,126  |
|                | KRUHOVÁ poloměr 5 m - 2. varianta<br>velknutí            | 150                | 0,406                                 | 0,210                                 | 0,207                                 | 0,210                     | 0,207                                 | 0,210                     | 0,208                                 | 0,320                     | 22,096 |
|                |  | 1 000              | 20,729                                | 9,329                                 | 0,046                                 | 9,329                     | 0,046                                 | 9,329                     | 0,045                                 | 13,000                    | 15,000 |
|                | TROJUHELNÍKOVÁ strana 5 m<br>prosté podepření            | 150                | 0,835                                 | 0,835                                 | 0,042                                 | 0,835                     | 0,042                                 | 0,835                     | 0,042                                 | 1,520                     | 0,427  |
|                |  | 1 000              | 41,571                                | 41,571                                | 0,010                                 | 41,571                    | 0,010                                 | 41,571                    | 0,010                                 | 66,500                    | 0,220  |
| nesymetrické   | TROJUHELNÍKOVÁ strana 7 m<br>velknutí                    | 150                | 1,304                                 | 1,304                                 | 0,047                                 | 1,304                     | 0,173                                 | 1,304                     | 0,173                                 | 1,435                     | 12,975 |
|                |  | 1 000              | 57,943                                | 57,943                                | 0,012                                 | 57,943                    | 0,037                                 | 57,943                    | 0,037                                 | 82,700                    | 6,557  |
|                | ČDŘÍ NIKOVÁ 16 x 8 m<br>velknutí jedné strany            | 150                | 0,139                                 | 0,111                                 | 0,602                                 | 0,111                     | 0,599                                 | 0,111                     | 0,599                                 | 0,145                     | 17,190 |
|                |  | 1 000              | 6,161                                 | 4,953                                 | 0,102                                 | 4,953                     | 0,102                                 | 4,953                     | 0,102                                 | 6,200                     | 0,549  |
|                | ODDĚLNÍKOVÁ 14 x 10 m<br>velknutí dvou sousedících stran | 150                | 0,146                                 | 0,110                                 | 0,605                                 | 0,110                     | 0,605                                 | 0,110                     | 0,599                                 | 0,149                     | 20,361 |
|                |  | 1 000              | 6,505                                 | 4,819                                 | 0,101                                 | 4,819                     | 0,101                                 | 4,819                     | 0,100                                 | 6,480                     | 4,164  |

Tabulka 5.1 Tabulka výsledných hodnot mezního zatížení.

## SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

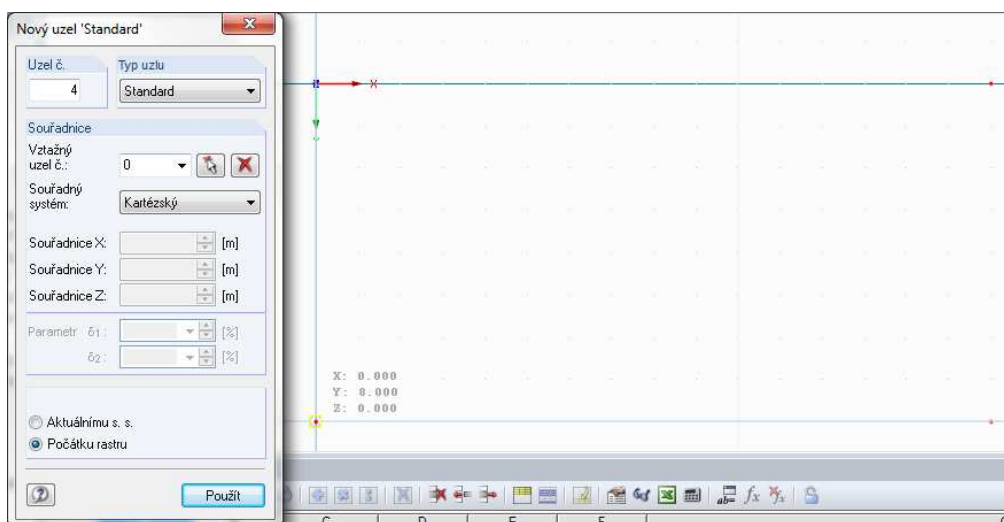
- 1 NETO, E. DE S.; PERIĆ, D.; OWEN, D. R. J. *Computational methods for plasticity. Theory and applications*. John Wiley & Sons Ltd. Set in 10/12pt Times by Sunrise Setting Ltd, Torquay, UK, 2008.
- 2 WRIGGERS, P. *Nonlinear finite element methods*. Springer – Verlag Berlin, Heidelberg, 2008.
- 3 SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R. *Interdisciplinary applied mathematics. Computational inelasticity*. Springer – Verlag Berlin, Heidelberg, 2000.
- 4 NĚMEC, I. *Nelineární mechanika. M01 Základy nelineární mechaniky*. VUT FAST, Brno, 2006.
- 5 BROŽOVSKÝ, J.; MATERNA, A. *Základy matematické teorie pružnosti*. Text byl vytvořen v rámci realizace projektu Matematika pro inženýry 21. století, na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni. 2012. Dostupné z www:  
[http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/mat\\_teorie\\_pruznosti.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/mat_teorie_pruznosti.pdf)
- 6 WALD, F.; BEDNÁŘ, J.; ŠTUIJBEROVÁ, M. *Odolnost ocelobetonového stropu při požárním experimentu v Mokrsku*. 17. 11. 2009 [cit. 5. 1. 2013]. Dostupné z www:  
<http://www.konstrukce.cz/clanek/odolnost-ocelobetonoveho-stropu-pri-pozarnim-experimentu-v-mokrsku>

- 
- 7 Kolektiv katedry stavební mechaniky. *Teorie plasticity a mezních stavů*. Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1. VUT FAST, Brno, 1972.
  - 8 RFEM Výpočet prostorových konstrukcí metodou konečných prvků. Popis programu. Ing. Software Dlubal s.r.o. Praha 2, 2008.
  - 9 ANSYS Mechanical APDL Preogrammer's Manual. ANSYS, Inc. Canonsburg, 2010.


## PŘÍLOHY

### POSTUP TVORBY MODELU V PROGRAMU RFEM

Zadávání jednotlivých uzlů modelu



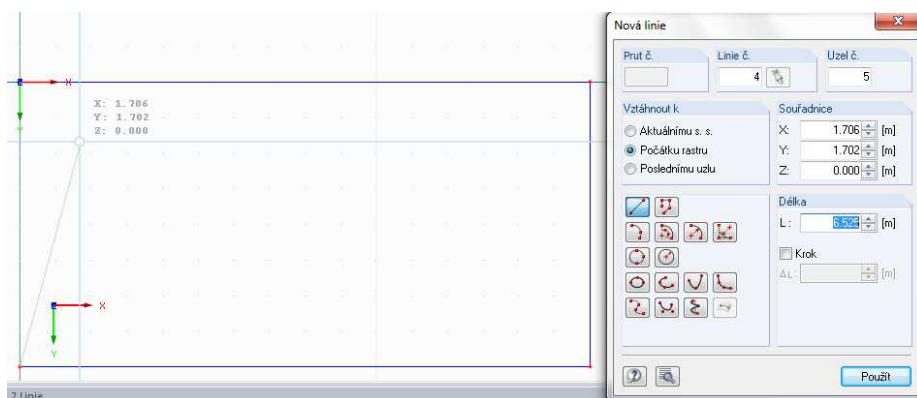
Zadané uzly včetně souřadnic



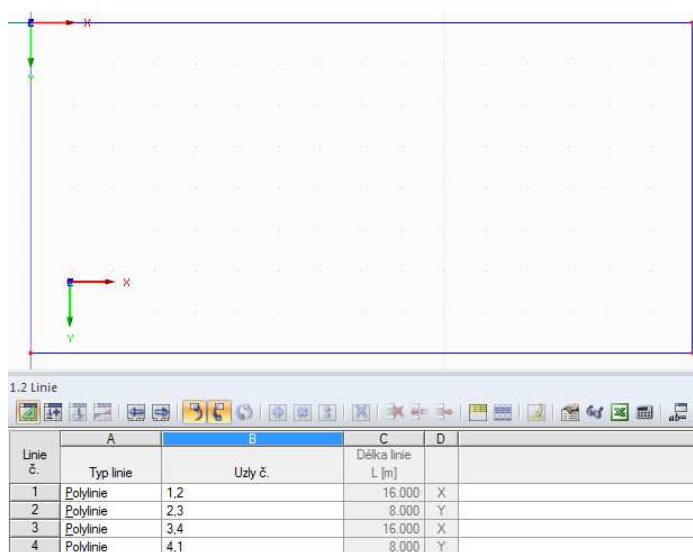
| Uzel č. | Typ uzlu | Reference Uzel | Souřadný systém | X [m]  | Y [m] | Z [m] |
|---------|----------|----------------|-----------------|--------|-------|-------|
| 1       | Standard | 0              | Kartézský       | 0.000  | 0.000 | 0.000 |
| 2       | Standard | 0              | Kartézský       | 16.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3       | Standard | 0              | Kartézský       | 16.000 | 8.000 | 0.000 |
| 4       | Standard | 0              | Kartézský       | 0.000  | 8.000 | 0.000 |



## Tvorba nových linií



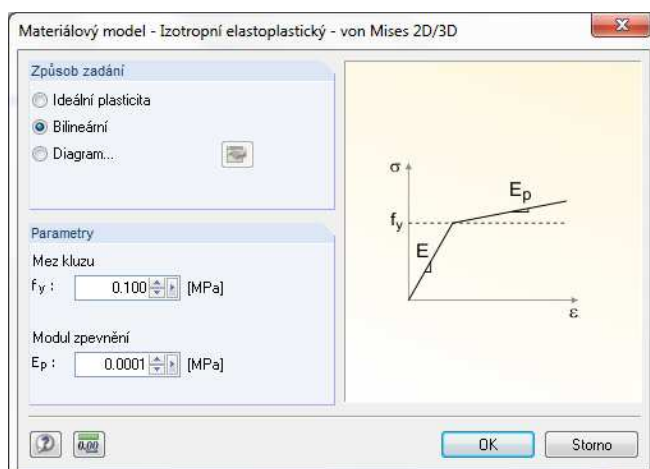
## Hotové linie a jednotlivé délky



1.2 Linie

| Linie č. | A         | B       | C                 | D |
|----------|-----------|---------|-------------------|---|
|          | Typ linie | Uzly č. | Délka linie L [m] |   |
| 1        | Polylinie | 1,2     | 16.000            | X |
| 2        | Polylinie | 2,3     | 8.000             | Y |
| 3        | Polylinie | 3,4     | 16.000            | X |
| 4        | Polylinie | 4,1     | 8.000             | Y |

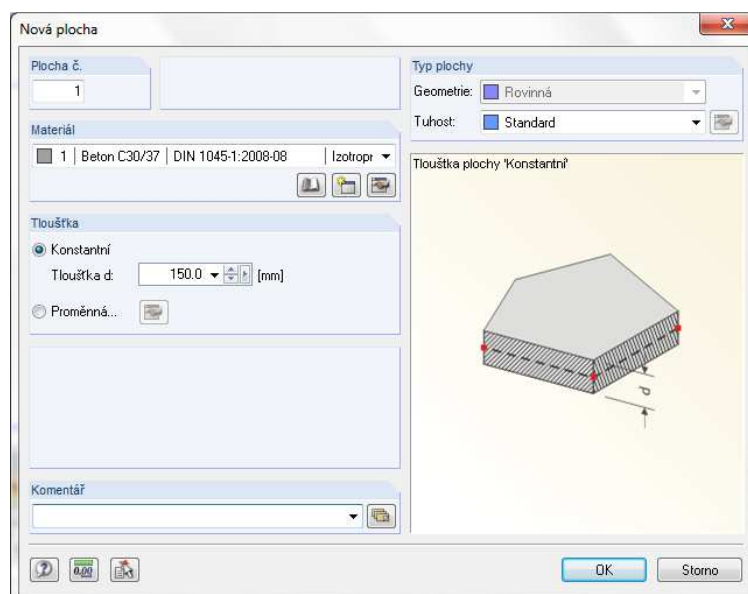
## Tvorba materiálového modelu – izotropní elastoplastický model von Mises



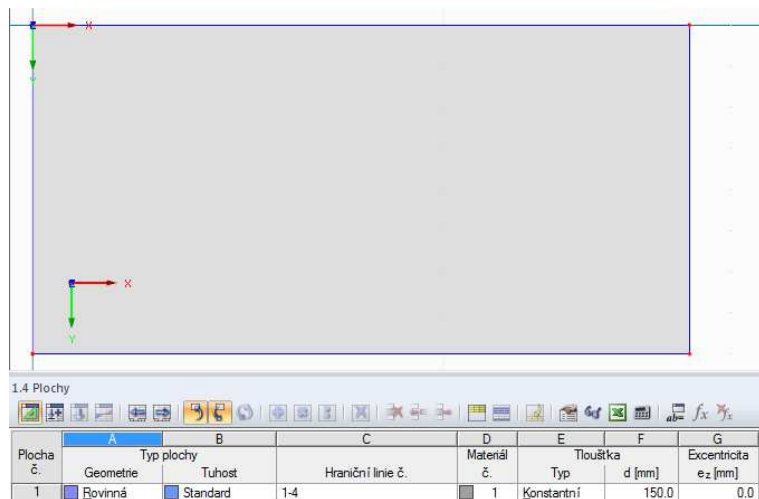
## Použitý materiál včetně vlastností

| Mat. č. | A<br>Materiál<br>Označení         | B<br>Modul pružnosti<br>E [MPa] | C<br>Smykový modul<br>G [MPa] | D<br>Poissonův souč.<br>ν [-] | E<br>Objemová tíha<br>γ [kN/m³] | F<br>Souč. teplot. roztaž.<br>α [1/K] | G<br>Souč. spolehlivosti<br>γ <sub>M</sub> [-] | H<br>Materiál<br>Model          |
|---------|-----------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|--|---------------------------------|
| 1       | Beton C30/37 / DIN 1045-1-2008-08 | 28300.000                       | 11791.700                     | 0.200                         | 25.00                           | 1.00E-05                              | 1.00   | Izotropní elastoplastický 2D/3D |

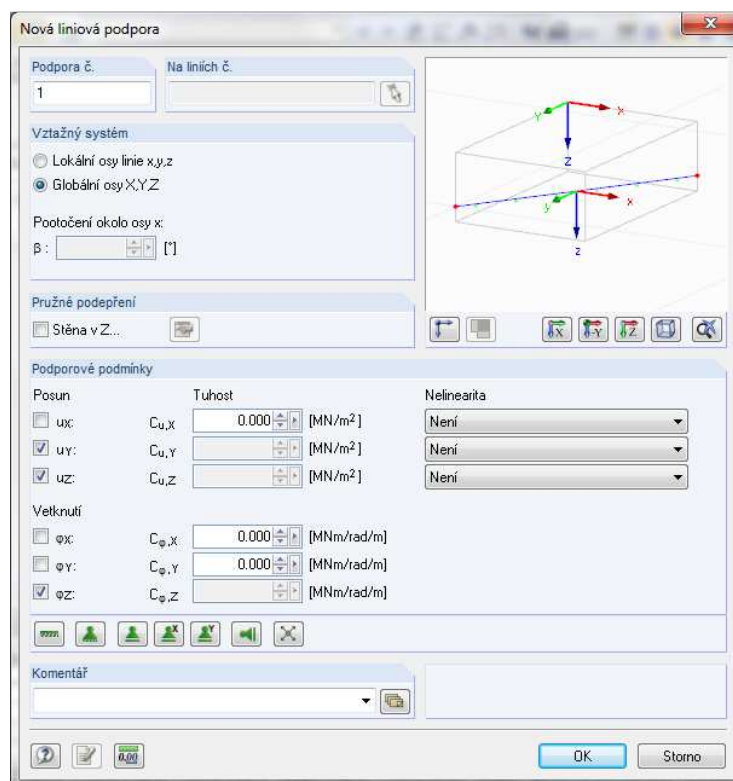
## Zadávání nové plochy



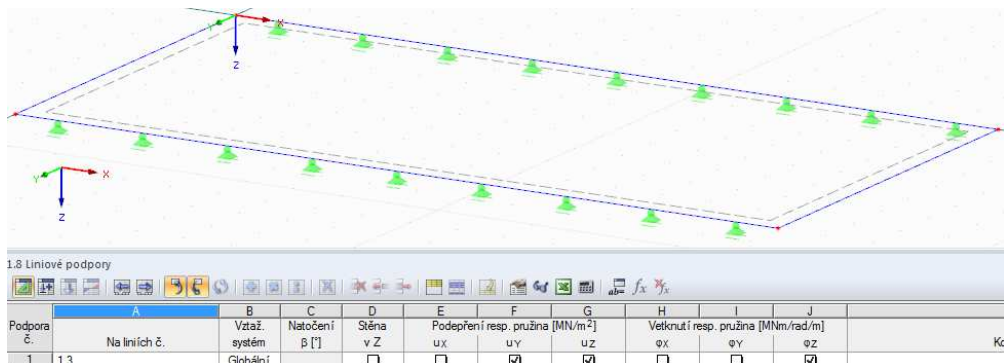
## Vytvořená plocha



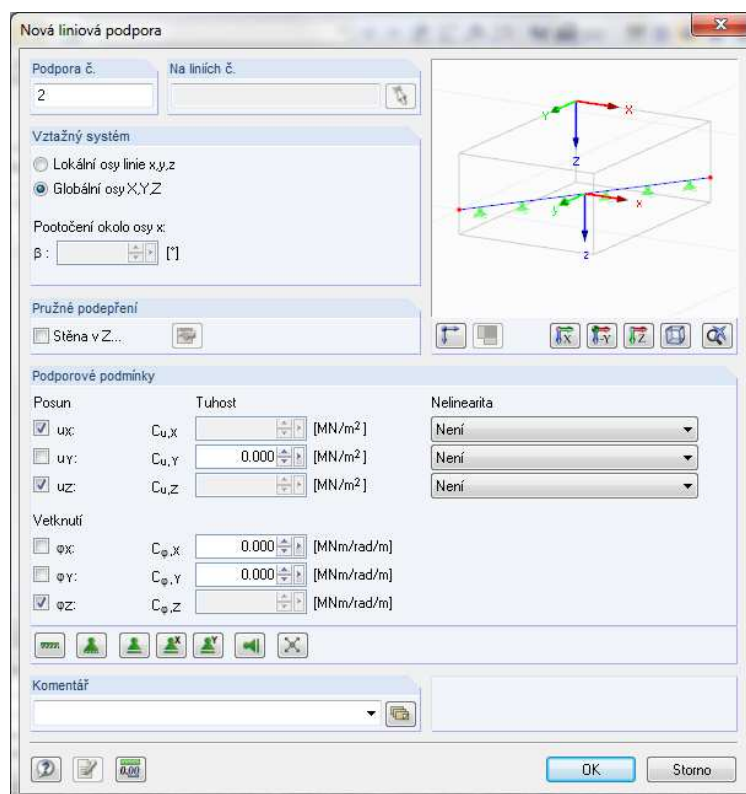
## Vytvoření liniové podpory v ose x



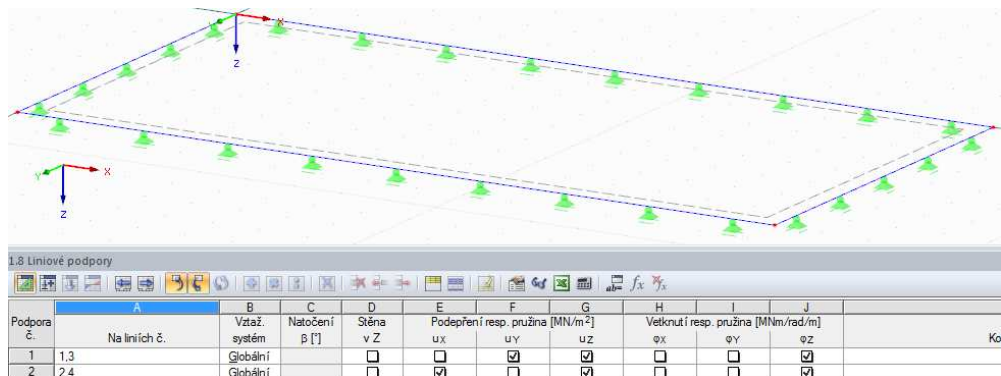
Hotová liniová podpora v ose x



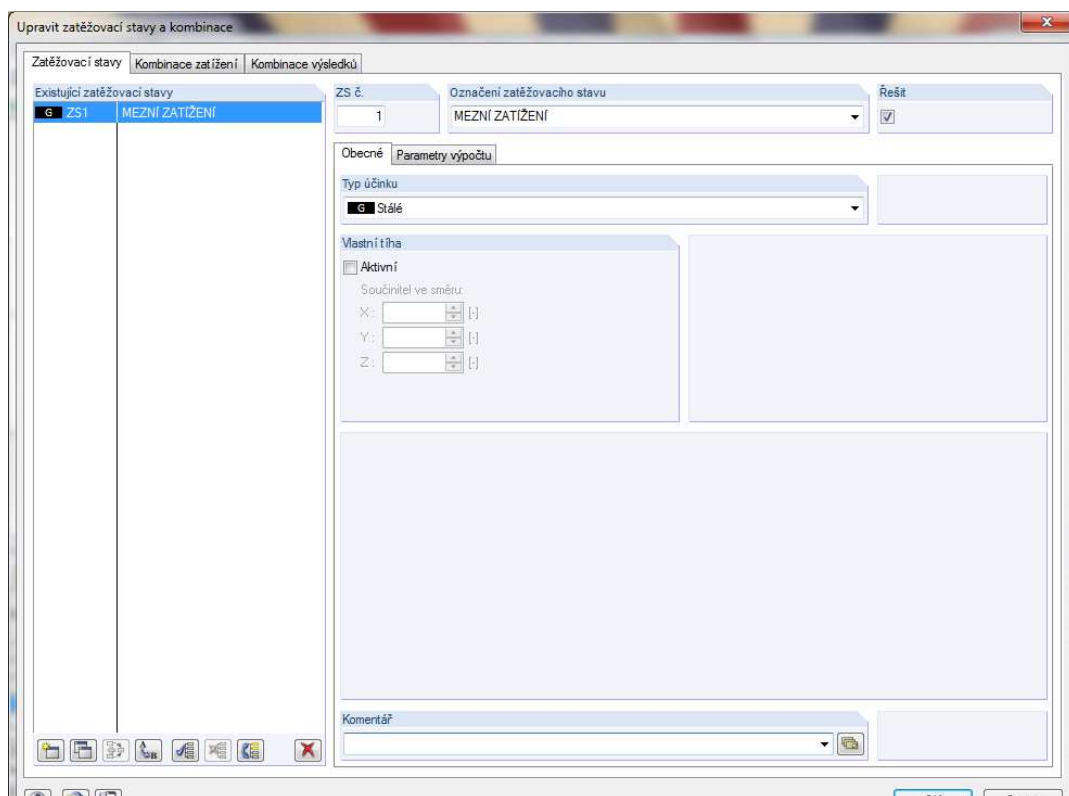
Vytvoření liniové podpory v ose y



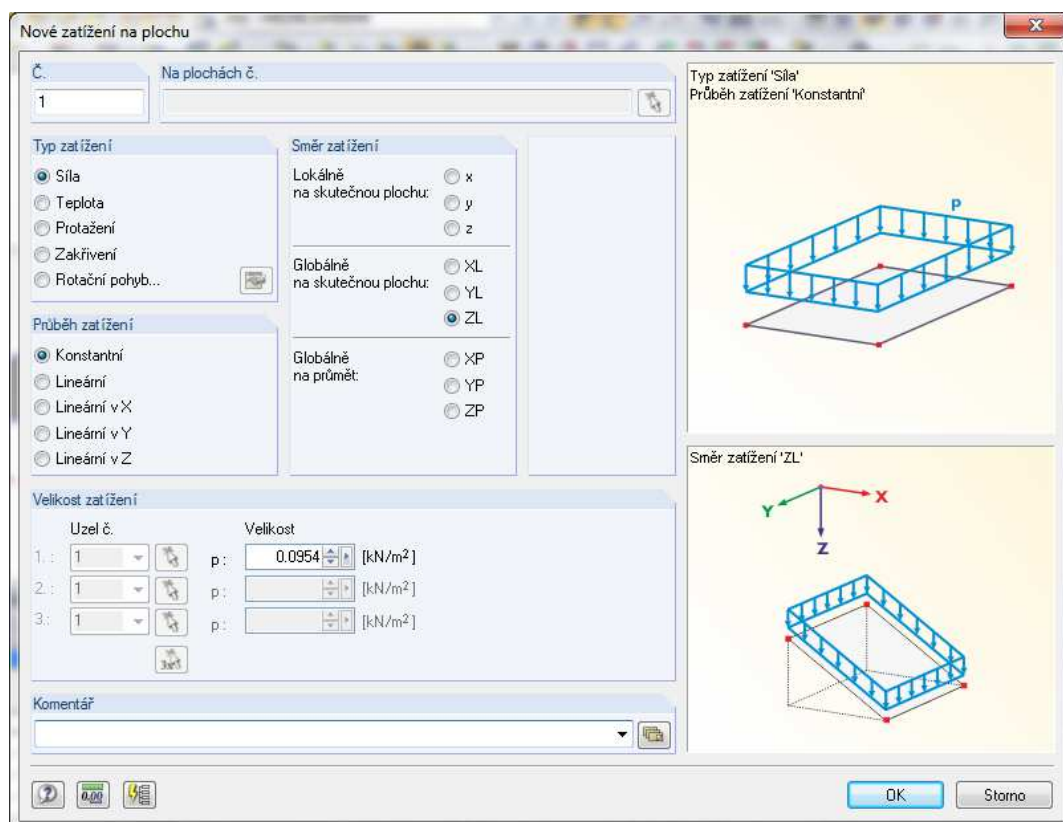
## Hotové liniové podpory



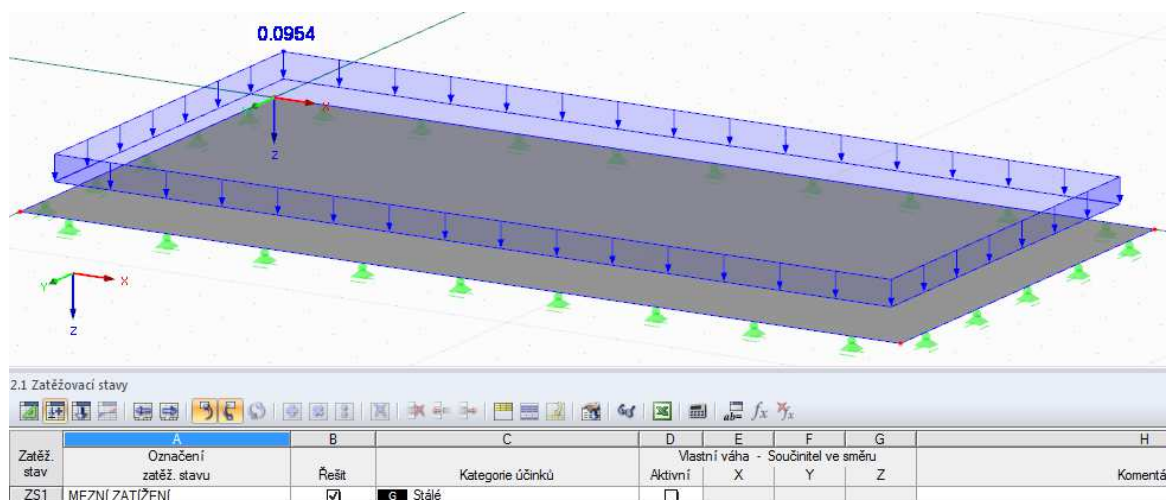
## Vytvoření nového zatěžovacího stavu



## Nastavení plošného zatížení

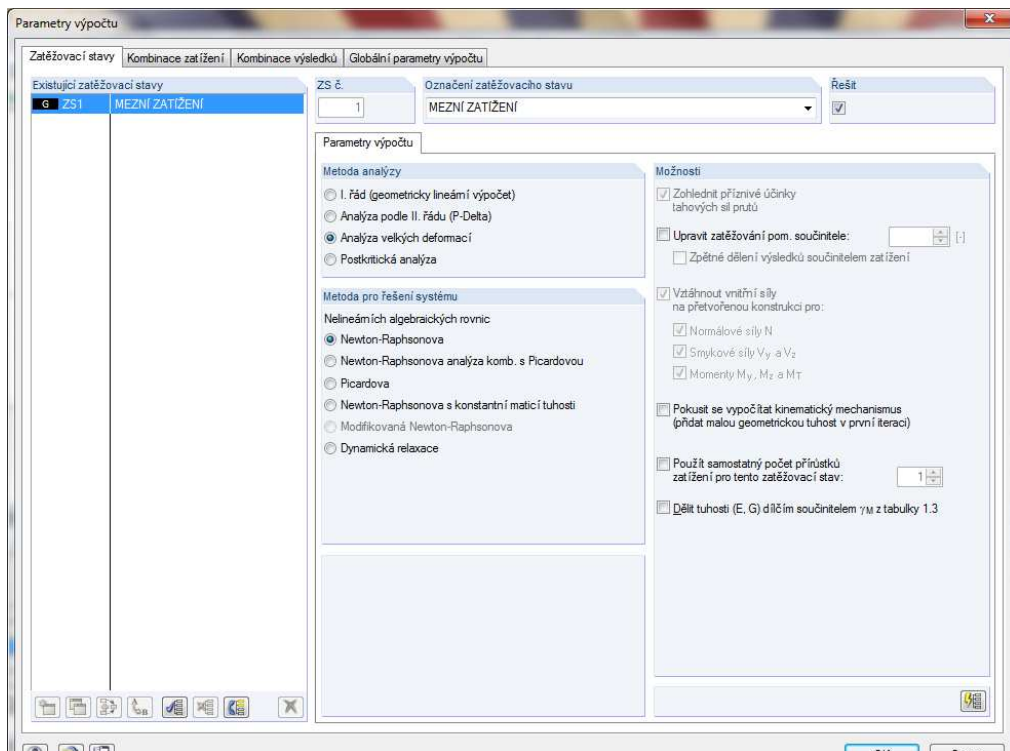


## Zadané mezní zatížení – zatížení na plochu





## Nastavení parametrů výpočtu



**Parametry výpočtu**

**Zatěžovací stavy** | **Kombinace zatížení** | **Kombinace výsledků** | **Globální parametry výpočtu**

Existující zatěžovací stavy: 6 ZS1 MEZNÍ ZATÍŽENÍ

ZS č.: 1

Označení zatěžovacího stavu: MEZNÍ ZATÍŽENÍ

**Metoda analýzy**

- ☐ I. řád (geometrický lineární výpočet)
- ☐ Analýza podle II. řádu (P-Delta)
- ☒ Analýza velkých deformací
- ☐ Postkritická analýza

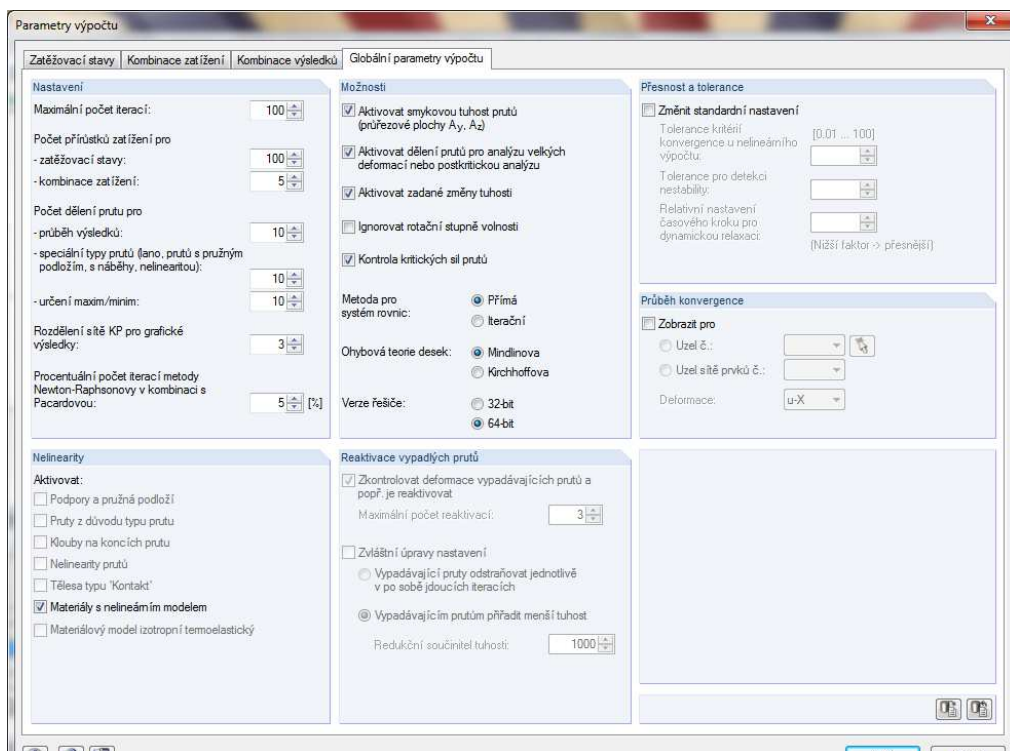
**Metoda pro řešení systému**

Ne-lineárních algebraických rovnic

- ☒ Newton-Raphsonova
- ☐ Newton-Raphsonova analýza komb. s Picardovou
- ☐ Picardova
- ☐ Newton-Raphsonova s konstantní maticí tuhosti
- ☐ Modifikovaná Newton-Raphsonova
- ☐ Dynamická relaxace

**Možnosti**

- ☒ Zohlednit příznivé účinky tahových sil prutů
- ☐ Upravit zatěžování pom. součinitele: [ ]
- ☐ Zpětné dělení výsledků součinitelem zatížení
- ☒ Vztáhnout vnitřní síly na přetvořenou konstrukci pro:
  - ☒ Normálové síly N
  - ☒ Smykové síly  $V_y$  a  $V_z$
  - ☒ Momenty  $M_y$ ,  $M_z$  a  $M_T$
- ☐ Pokusit se vypočítat kinematický mechanismus (přidat malou geometrickou tuhost v první iteraci)
- ☐ Použít samostatný počet přírůstků zatížení pro tento zatěžovací stav: [1]
- ☐ Dělit tuhosti (E, G) dílčím součinitelem  $\gamma_M$  z tabulky 1.3



**Parametry výpočtu**

**Zatěžovací stavy** | **Kombinace zatížení** | **Kombinace výsledků** | **Globální parametry výpočtu**

**Nastavení**

- Maximální počet iterací: 100
- Počet přírůstků zatížení pro:
  - zatěžovací stavy: 100
  - kombinace zatížení: 5
- Počet dělení prutu pro:
  - průběh výsledků: 10
  - speciální typy prutů (lano, prutů s pružným podložím, s náběhy, nelinearitou): 10
  - určení max./minim: 10
- Rozdělení sítě KP pro grafické výsledky: 3
- Procentuální počet iterací metody Newton-Raphsonovy v kombinaci s Picardovou: 5 [%]

**Možnosti**

- ☒ Aktivovat smykovou tuhost prutů (průřezové plochy  $A_y$ ,  $A_z$ )
- ☒ Aktivovat dělení prutů pro analýzu velkých deformací nebo postkritickou analýzu
- ☒ Aktivovat zadané změny tuhosti
- ☐ Ignorovat rotační stupně volnosti
- ☒ Kontrola kritických sil prutů

**Metoda pro systém rovnic:**

- ☒ Přímá
- ☐ Iterační

**Ohybová teorie desek:**

- ☒ Mindlinova
- ☐ Kirchhoffova

**Verze řešiče:**

- ☐ 32-bit
- ☒ 64-bit

**Reaktivace vypadlých prutů**

- ☒ Zkontrolovat deformace vypadávajících prutů a popř. je reaktivovat
- Maximální počet reaktivací: 3
- ☐ Zvláštní úpravy nastavení
  - ☐ Vypadávající pruty odstraňovat jednotlivě v po sobě jdoucích iteracích
  - ☒ Vypadávajícím prutům přiřadit menší tuhost
- Redukční součinitel tuhosti: 1000

**Přesnost a tolerance**

- ☒ Změnit standardní nastavení
  - Tolerance kritérií konvergence u nelineárního výpočtu: [0.01 ... 100]
  - Tolerance pro detekci nestability: [ ]
  - Relativní nastavení časového kroku pro dynamickou relaxaci: [Nižší faktor -> přesnější]

**Průběh konvergence**

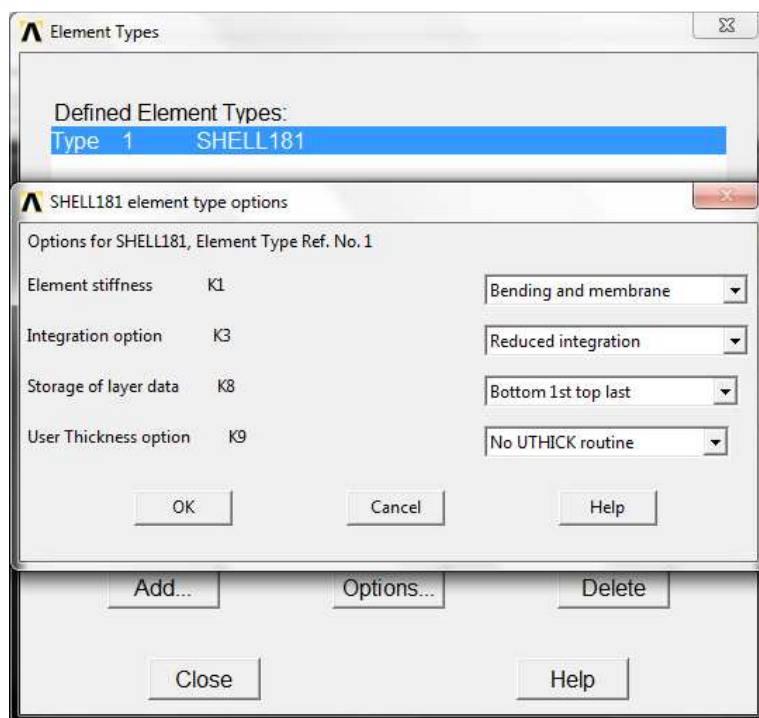
- ☐ Zobrazit pro:
  - ☐ Uzel č.: [ ]
  - ☐ Uzel sítě prvků č.: [ ]
  - Deformace: u-X

**Nonlinearity**

- ☐ Aktivovat:
  - ☐ Podpory a pružná podloží
  - ☐ Pruty z důvodu typu prutu
  - ☐ Klouby na koncích prutu
  - ☐ Nonlinearity prutů
  - ☐ Tělesa typu 'Kontakt'
  - ☒ Materiály s nelineárním modelem
  - ☐ Materiálový model izotropní termoelastický

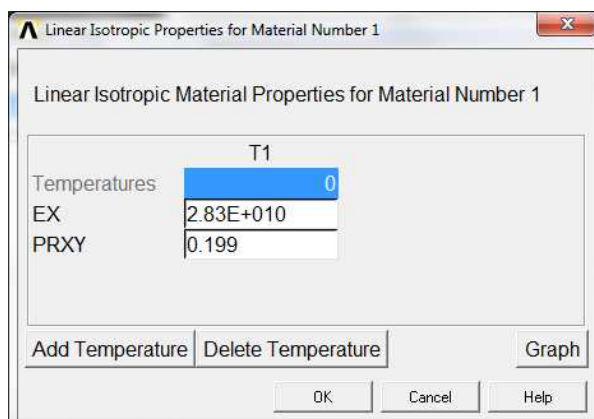
## POSTUP TVORBY MODELU V PROGRAMU ANSYS

Výběr typu prvku – zadáváno pomocí skořepinových prvků



Zadání materiálových vlastností – lineárního izotropického materiálu

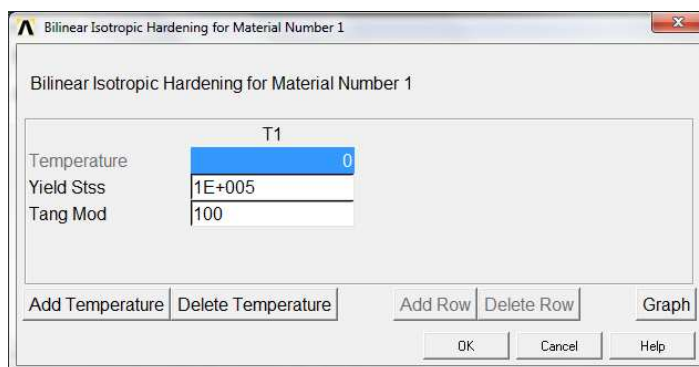
- modul pružnosti  $E = 28\,300\text{ MPa}$
- Poissonovo číslo  $\nu = 0,199$



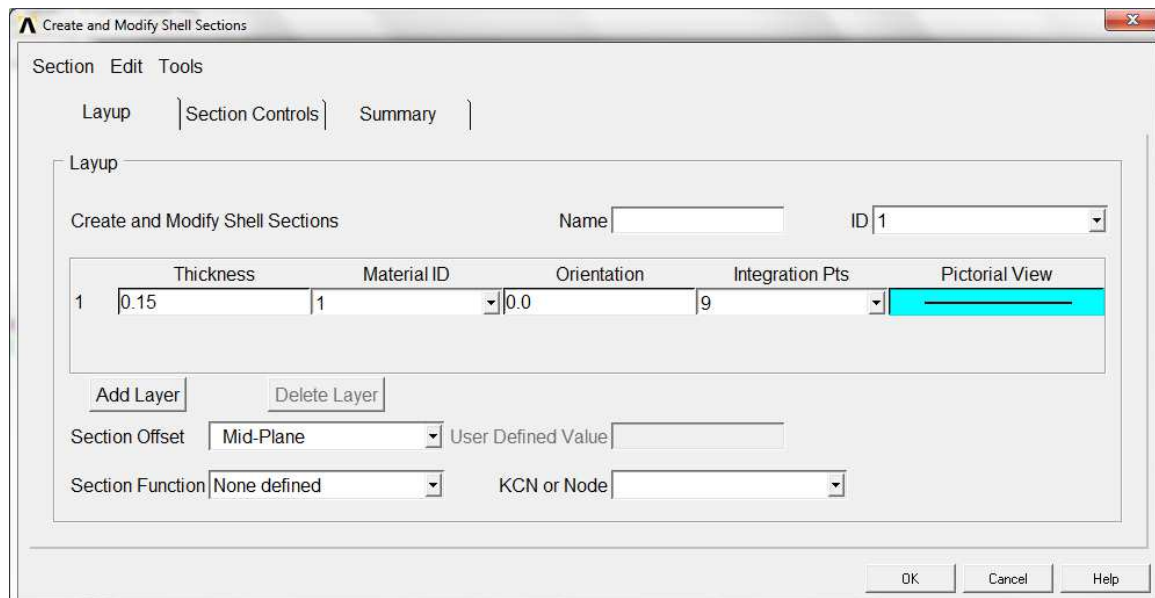


Zadání materiálových vlastností – von Misesův model – bilineární izotropické zpevnění pro materiálový model

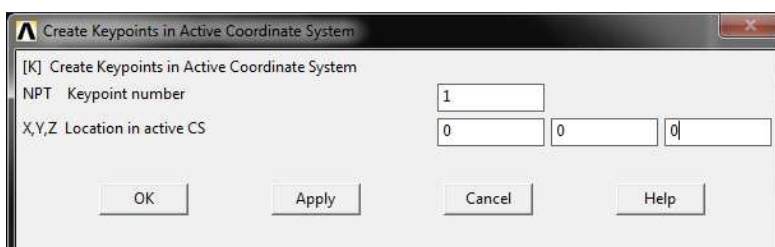
- mez kluzu  $f_y = 0,1 \text{ MPa}$
- modul zpevnění  $E_p = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}$



Nastavení tloušťky počítané vrstvy a počtu integračních bodů, pro sjednocení řešení s řešením v programu RFEM.



## Tvorba vlastního modelu – zadávání klíčových bodů



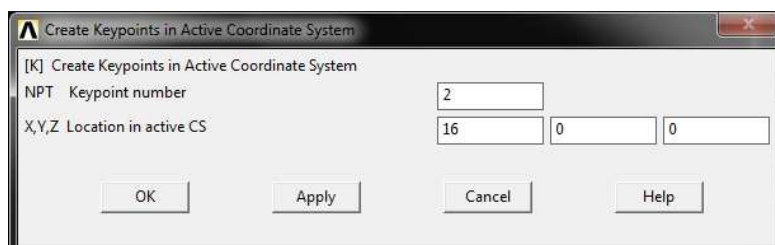
Dialog box: Create Keypoints in Active Coordinate System

[K] Create Keypoints in Active Coordinate System

NPT Keypoint number: 1

X,Y,Z Location in active CS: 0, 0, 0

Buttons: OK, Apply, Cancel, Help



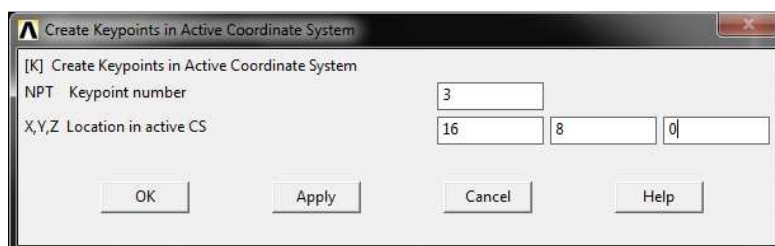
Dialog box: Create Keypoints in Active Coordinate System

[K] Create Keypoints in Active Coordinate System

NPT Keypoint number: 2

X,Y,Z Location in active CS: 16, 0, 0

Buttons: OK, Apply, Cancel, Help



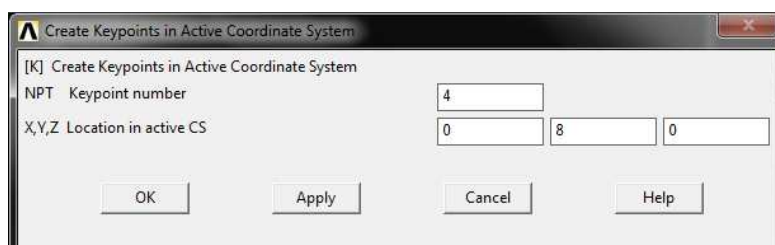
Dialog box: Create Keypoints in Active Coordinate System

[K] Create Keypoints in Active Coordinate System

NPT Keypoint number: 3

X,Y,Z Location in active CS: 16, 8, 0

Buttons: OK, Apply, Cancel, Help



Dialog box: Create Keypoints in Active Coordinate System

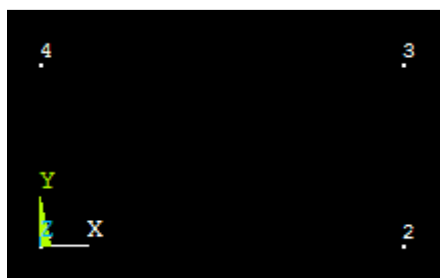
[K] Create Keypoints in Active Coordinate System

NPT Keypoint number: 4

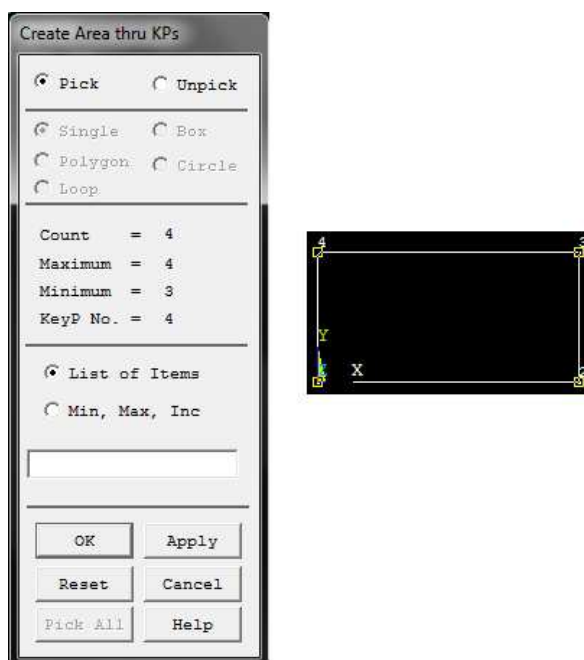
X,Y,Z Location in active CS: 0, 8, 0

Buttons: OK, Apply, Cancel, Help

## Hotové zadání klíčových bodů

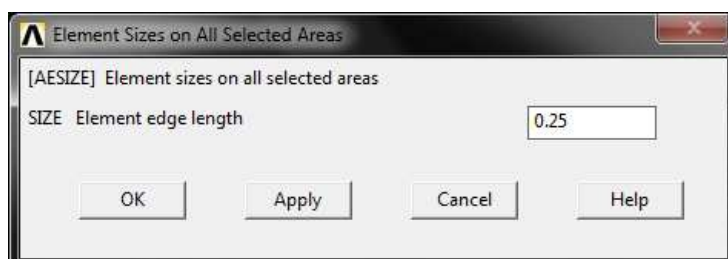


Zadání nové plochy pomocí klíčových bodů a zobrazení výsledné plochy.

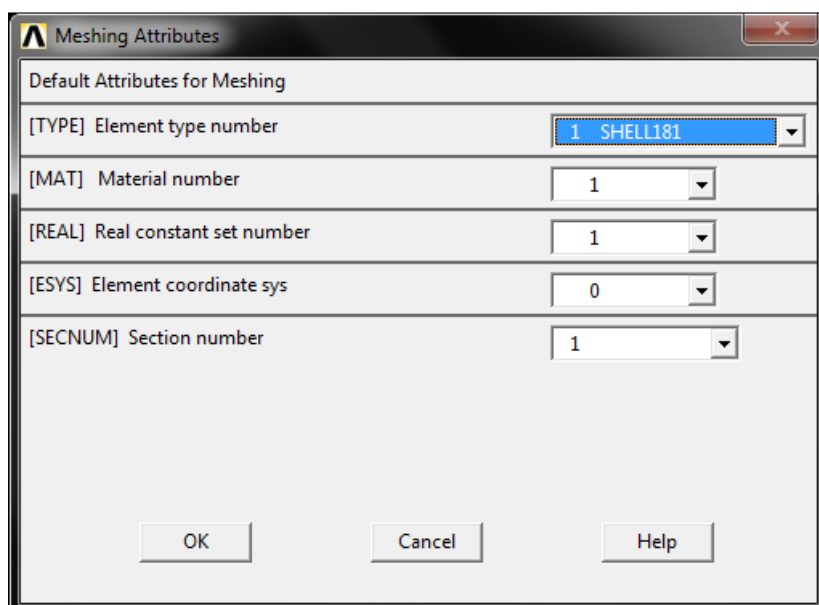


Zadání délky prvku a přiřazení atributů generované sítě prvků

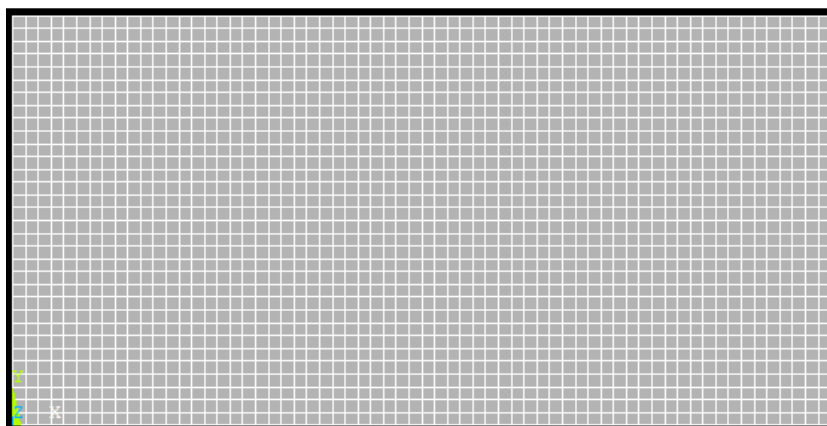
- délka strany prvku  $d = 0,250 \text{ m}$



- přiřazení typu prvků, materiálového modelu, tloušťky a nastavení tloušťky vrstvy a počtu integračních bodů.

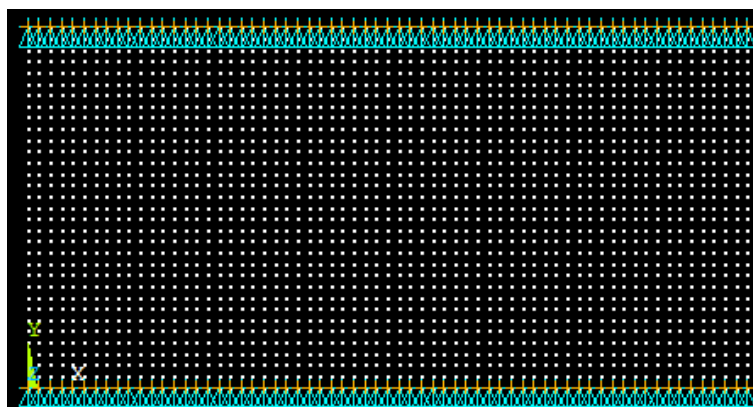
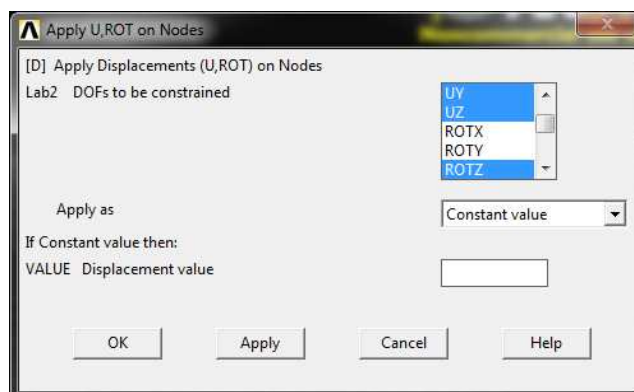
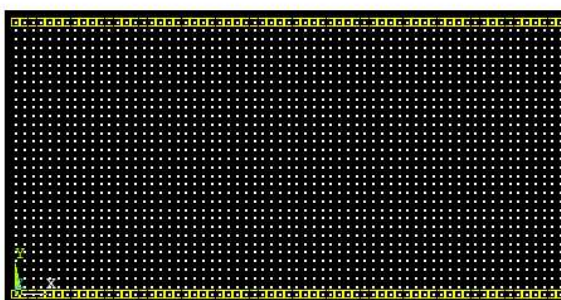
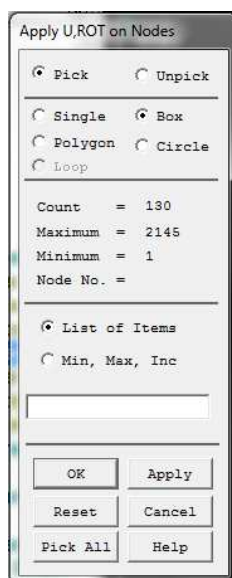


Výsledný tvar vygenerované sítě prvků

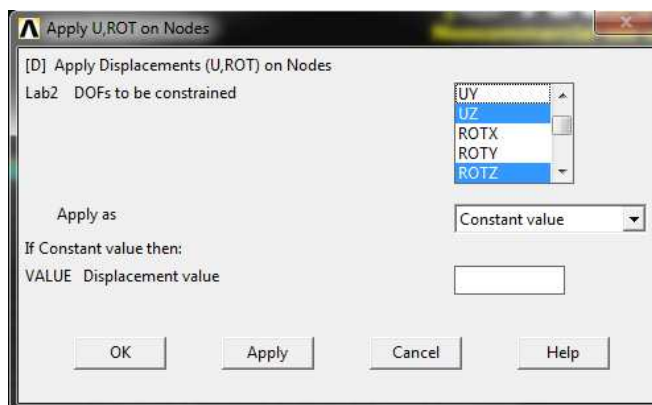


Zadání okrajových podmínek:

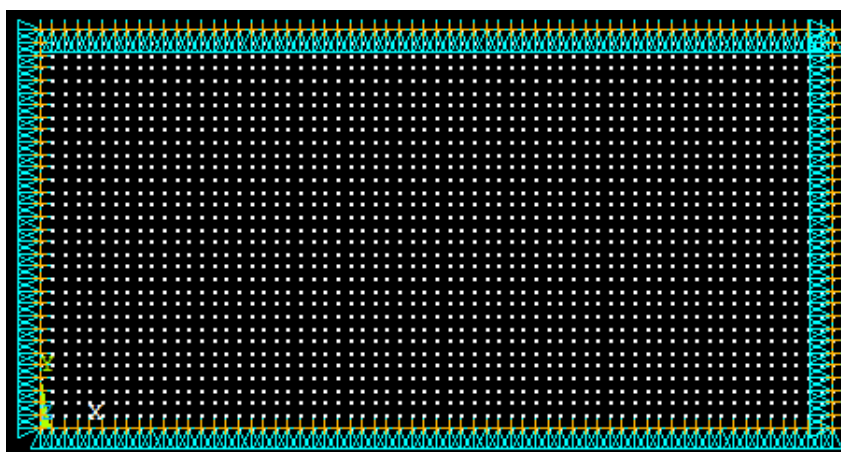
- prosté podepření ve směru osy x



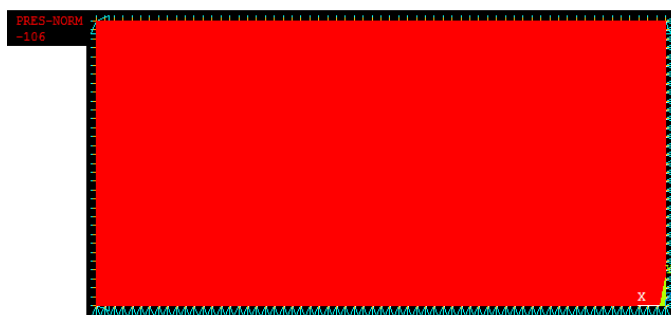
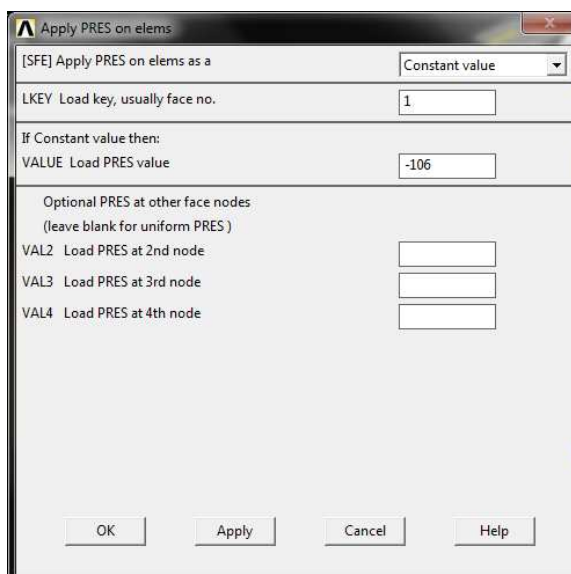
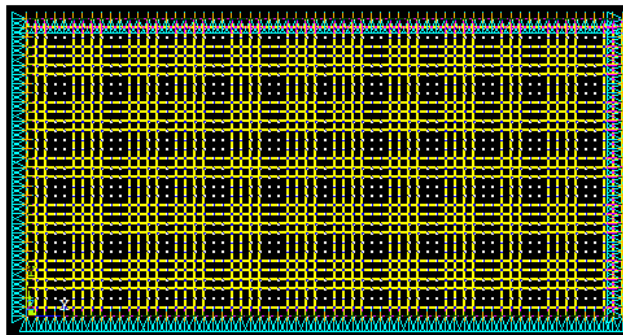
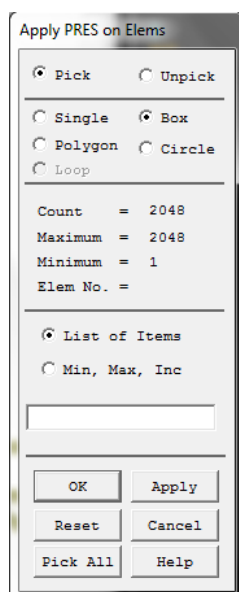
- prosté podepření ve směru osy y



- hotové zadání okrajových podmínek

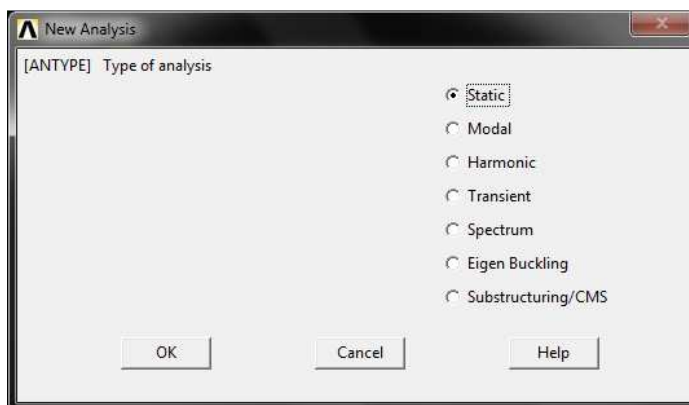


Tvorba zatížení – konstantní tlak působící na všechny prvky



## Nastavení parametrů výpočtu

- typ analýzy - statická



- analýza velkých deformací
- počet subkroků - 500

